4. kolokvij, 1994

1. Naj bo U vektorski prostor s skalarnim produktom, $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ pa linearni preslikavi $U \to U$. Dokaži:

$$\mathcal{B}^*\mathcal{A} = 0 \iff \mathrm{im}\mathcal{B} \subset (\mathrm{im}\mathcal{A})^\perp .$$

2. Katero ploskev predstavlja enačba

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 14xy + 8xz - 8yz = 24\ ?$$

Poišči njene osi. Čim bolj natančno nariši krivuljo, ki je presek te ploskve z ravnino $z = 0$.

3. Poišči matriko zrcaljenja čez podprostor

$$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4;\ 4a - b - c = 0,\ b - c + 4d = 0\}$$

v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^4$.

4. V $\mathbb{R}^3$ uvedi skalarni produkt tako, da bodo vektorji

$$(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$$

ortonormirani. Glede na tak skalarni produkt izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $(1, 0, 0)$ na vektor $(0, 1, 0)$.

4. kolokvij, 1995

1. Dana sta podprostora v $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4;\ a + b + c + d = 0\}\ ,$$

$$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4;\ a = 2b = -c = 2d\}\ .$$

P naj bo projektor na V vzdolž U. Poišči matriki za P in P^* v standardnih bazah prostora $\mathbb{R}^4$. Ali je P^* projektor? Če je, kam in vzdolž česa projicira?

2. Poišči matriko kakšne ortogonalne transformacije $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki preslika ravnino $x+y+z = 0$ na ravnino $x - y - 2z = 0$ in vektor $(1, -1, 0)$ v vektor $(1, 1, 0)$. Koliko je takšnih matrik?

3. Kaj predstavlja ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz + 4yz = 1\ ?$$

Čim bolj natančno nariši presek te ploskve z ravnino $x = 0$.

4. Na bo V realen vektorski prostor in K linearna preslikava $V \to V$. Pokaži, da velja $K^* = -K$ natanko takrat, kadar za vsak vektor $x \in V$ velja $\langle Kx, x\rangle = 0$.

4. kolokvij, 1996

1. Dana je kvadratna forma

$$Q(x, y, z) = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 4z^2 + 7xy - 2xz - 2yz\,.$$

Katero ploskev predstavlja enačba $Q(x, y, z) = 0$? Poišči njene osi, jo skiciraj in nariši njen presek z ravnino $x + y + z = 0$.

2. Sebi adjungirana linearna preslikava $\mathcal{A}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima lastne vrednosti 1, -1 in 0. Njeno jedro je premica $x = -y$, $z = 0$ in velja

$$\mathcal{A}(1, 1, -1) = (-1, -1, 1)\,.$$

Poišči matriko za $\mathcal{A}^n$ v standardni bazi. V $\mathbb{R}^3$ imamo standardni skalarni produkt.

3. Naj bo $\mathcal{P}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projektor na ravnino $x + y - z = 0$ vzdolž premice $x = y = z$. Poišči matriko za $\mathcal{P}$ v standardni bazi. Pokaži, da je tudi $\mathcal{P}^*$ projektor. Kam projecira in vzdolž česa? V $\mathbb{R}^3$ imamo standardni skalarni produkt.

4. V prostoru $P_2(\mathbb{R})$ polinomov stopnje kvečjemu dva je dan predpis

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt + p(0)q(0)\,.$$

Pokaži, da je to skalarni produkt in poišči kakšno pravokotno bazo ortogonalnega komplementa prostora

$$V = \mathcal{L}\{t^2 - t\}\,.$$

4. kolokvij, 1997

1. Katero ploskev v prostoru predstavlja enačba

$$y^2 - 3z^2 + 4xz = 4\,?$$

Poišči njene osi. Čim bolj natančno nariši njen presek z ravnino $y = 0$.

2. (a) Naj bo V realen vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in normo $\|\cdot\|$, porojeno iz tega produkta. Pokaži, da za poljubna vektorja $x, y \in V$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja:

(i) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$

(ii) Če je $\|x\| = \|y\|$, potem je $\|\alpha x + \beta y\| = \|\alpha y + \beta x\|$.

(b) V $\mathbb{R}^2$ je dana norma $\|(a, b)\| := |a| + |b|$. Pokaži, da obstajata taka vektorja $x, y \in \mathbb{R}^2$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, da je $\|x\| = \|y\|$, vendar $\|\alpha x + \beta y\| \neq \|\alpha y + \beta x\|$. (To pomeni, da tako definirana norma ni porojena iz skalarnega produkta.)

3. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $A, B\colon\ V \to V$ sebi adjungirani linearni preslikavi. Pokaži: če je za vsak vektor $x \in V$ velja enakost

$$\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle\,,$$

potem je $A = B$.

4. V prostoru $P_1(\mathbb{R})$ polinomov stopnje največ ena je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1) .$$

Naj bo $A\colon\ P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ linearna preslikava, dana s predpisom

$$(Ap)(t) := (tp(t))' .$$

Določi $A^*(t+1)$.

4. kolokvij, 1998

1. [25 %] Linearna preslikava $\mathcal{A}$, ki slika iz prostora realnih polinomov stopnje največ dva vase, je podana s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(t) := (tp(t))' + 6t \int_0^1 p(x)dx .$$

(a) [10 %] Določi matriko A, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah $\{1, t, t^2\}$.

(b) [15 %] Določi podobno diagonalno matriko in ustrezno prehodno matriko.

2. Naj bo V n-razsežen realni vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a in b pa dana linearno neodvisna vektorja iz prostora V. Preslikava $\mathcal{A}\colon\ V \to V$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}x := \langle x, a \rangle b .$$

(a) [10 %] Pokaži, da je preslikava $\mathcal{A}$ linearna. Določi predpis za adjungirano preslikavo $\mathcal{A}^*$.

(b) [10 %] Določi lastne vrednosti in ustrezne lastne podprostore preslikave $\mathcal{A}$. Ali se da preslikava $\mathcal{A}$ diagonalizirati? Odgovor utemelji.

(c) [10 %] Kakšna morata biti vektorja a in b, da bo preslikava $\mathcal{A}$ normalna?

3. [25 %] V prostoru realnih polinom stopnje največ tri je dan skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx .$$

Poišči kakšno pravokotno bazo množice $\{1 + t, t^2 - 1\}^\perp$.

4. [20 %] Čim bolj natančno nariši krivuljo v $\mathbb{R}^2$, določeno z enačbo

$$-3x^2 - 8xy + 3y^2 = 1 .$$

Določi osi dane krivulje.

4. kolokvij, 1999

1. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} -6 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ -14 & 12 & 15 \end{bmatrix} .$$

Poišči kakšno matriko $B \in M_3(\mathbb{R})$, za katero velja $B^3 = A$. Koliko je takšnih matrik?

2. Za katere vrednosti parametra $t \in \mathbb{R}$ se da diagonalizirati matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 25 \\ 0 & t & t+1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

3. Na vektorskem prostoru $P_3(\mathbb{R})$ realnih polinomov stopnje manjše ali enake tri je dana preslikava

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p'(t) q'(t)\, dt + p(0)q(0) .$$

Pokaži, da je to skalarni produkt.

Poišči (glede na zgornji skalarni produkt) adjungirano preslikavo A^* k preslikavi A, ki je podana s pravilom

$$(Ap)(t) = t^3 p(1/t) .$$

4. Pri istem skalarnem produktu kot pri tretji nalogi poišči pravokotno projekcijo polinoma $1 + t - t^3$ na podprostor $U = \ker D^3$, kjer je $Dp := p'$. Kolikšna je razdalja tega vektorja do podprostora U?

4. kolokvij, 2000

1. Na prostoru $P_2(\mathbb{R})$ realnih polinomov stopnje največ dva so dani funkcionali

$$f_i(p) := 6 \int_0^i p(t)\, dt ; \quad i = 1, 2, 3 .$$

(a) Pokaži, da funkcionali $\{f_1, f_2, f_3\}$ tvorijo bazo prostora $P_2(\mathbb{R})^*$.

(b) Kateri polinom po Rieszovem izreku ustreza funkcionalu f_2 glede na skalarni produkt

$$(p, q) := \int_{-1}^1 p(t) q(t)\, dt \,?$$

2. Dana je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Utemelji, zakaj se da matrika A diagonalizirati.

(b) Za $n \in \mathbb{N}$ poišči matriko A^n.

3. V prostoru $P_2(\mathbb{R})$ polinomov stopnje največ dva je dan skalarni produkt

$$(p,q) := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$$

in podprostor

$$\mathcal{U} := \{p \in P_2(\mathbb{R});\ p'(0) = 0\}\,.$$

Kateri polinom v prostoru $\mathcal{U}$ je najbližje polinomu $r(t) = t + 1$? Kolikšna je oddaljenost polinoma r od prostora $\mathcal{U}$?

4. Koliko je ortogonalnih preslikav $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki preslikajo
premico $x = \frac{y}{2} = z$ v premico $-\frac{x}{2} = y = z$
in premico $x = -y = z$ v premico $x = y = z$?
Poišči matriko katere od njih v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

4. kolokvij, 2001

1. Linearni preslikavi $\mathcal{P}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v standardnih bazah ustreza matrika

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -6 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike P.

(b) S pomočjo točke (a) opiši, zakaj je preslikava $\mathcal{P}$ geometrijsko projekcija. Kam in vzdolž česa projicira?

2. V prostoru $P_2(\mathbb{R})$ je dan skalarni produkt

$$(p,q) := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

in podprostor

$$\mathcal{U} := \{p \in P_2(\mathbb{R});\ p'(1) = 0\}\,.$$

Kateri polinom v prostoru $\mathcal{U}$ je najbližje polinomu $t^2 + t + 1$?

3. Linearna preslikava $A\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$(Ap)(t) := tp'(t) + \int_0^t xp''(x)\,dx\,.$$

Prostor $P_2(\mathbb{R})$ je opremljen z enakim skalarnim produktom kot v drugi nalogi. Katera matrika pripada preslikavi A^* v standardni bazi $\{1, t, t^2\}$ prostora $P_2(\mathbb{R})$?

4. Poišči funkcije $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ki rešijo sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} x' &= -x + y \\ y' &= 4y - 2z \\ z' &= 6y - 3z \end{aligned}$$

4. kolokvij, 2002

1. Izračunaj A^{100} za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. V prostoru realnih polinomov stopnje največ dva je podan skalarni produkt

$$(p, q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)\,.$$

V podprostoru

$$U := \{p \in P_2(\mathbb{R});\ p'(0) = p'(1) = 0\}$$

poišči polinom, ki je, glede na dani skalarni produkt, najbližje polinomu $t^2 + t$.

3. Preslikava $R\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je vrtež okrog premice

$$\frac{x}{2} = -y = \frac{z}{2}\,.$$

Napiši matriko adjungirane preslikave R^* glede na običajni skalarni produkt in opiši njeno geometrijsko delovanje.

4. Sebi adjungirana linearna preslikava $S\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima dvojno lastno vrednost 0, pripadajoči lastni podprostor je ravnina $x + y - z = 0$; in še eno lastno vrednost 1. Poišči matriko, ki pripada preslikavi S v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

4. kolokvij, 2004

1. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje $(2n + 1) \times (2n + 1)$ matrike:

$$\begin{bmatrix} & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \end{bmatrix}$$

Na neoznačenih mestih so ničle. Če naloge ne znaš rešiti v splošnem, jo reši vsaj v primeru, ko je $n = 2$ ([15%]).

2. V prostoru realnih linearnih polinomov $P_1(\mathbb{R})$ je dan skalarni produkt

$$(p, q) := p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Kateri linearni polinom je glede na ta skalarni produkt najbližje funkciji $f(x) = e^x$?

3. Izračunaj peti koren matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. V prostoru realnih polinomov stopnje največ dva $P_2(\mathbb{R})$ je podano pravilo

$$(p, q) := p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0).$$

(a) Pokaži, da je $(\cdot, \cdot)$ skalarni produkt na $P_2(\mathbb{R})$.

(b) Določi bazo prostora $\mathcal{L}\{t + 1, t^2 - 1\}^\perp$.