11. ADJUNGIRANA MATRIKA

Če je $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{bmatrix},$$

naj bo

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}}, & \overline{a_{12}}, & \dots, & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}}, & \overline{a_{22}}, & \dots, & \overline{a_{2n}} \\ - & - & - & - \\ \overline{a_{m1}}, & \overline{a_{m2}}, & \dots, & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

(konjugirali smo vse elemente v A)

in

$$\boxed{A^* = (\overline{A})^T} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \dots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix} \in M_{nm}(\mathbb{C}).$$

Pravimo, da je A^* ADJUNGIRANA matrika k A. Če je A realna, je $A^* = A^T$.

Velja:

$$\boxed{\begin{gathered} A^{**} = A \\ (A+B)^* = A^* + B^* \\ (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* \\ (AB)^* = B^* A^*. \end{gathered}}$$

Zadnja lastnost sledi iz $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

Primer: Če je $A = \begin{bmatrix} 5 & , & i \\ 2-i & , & 3+2i \end{bmatrix}$, je $\overline{A} = \begin{bmatrix} 5 & , & -i \\ 2+i & , & 3-2i \end{bmatrix}$

in $A^* = (\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 5 & , & 2+i \\ -i & , & 3-2i \end{bmatrix}$.

Če je $S = \begin{bmatrix} 3 \\ i \\ -i \\ 1-i \end{bmatrix}$, je $S^* = [3, -i, i, 1+i]$.

Def. Če stolpci kvadratne matrike U sestavljajo ONS, je U UNITARNA matrika. Če je U realna unitarna matrika, je U ORTOGONALNA.

Kvadratna matrika U je unitarna natanko takrat, ko je

$$U^* = U^{-1}.$$

D. U^*U ima na presečišču i-te vrstice in j-tega stolpca skalarni produkt i-tega in j-tega stolpca matrike U, torej 0, če je $i \neq j$, in 1, če je $i = j$. Torej je $U^*U = I$. Od tod vemo, da sledi: U je nesingularna in $U^* = U^{-1}$.

Posledica: Za $U \in M_n$ so ekvivalentne naslednje izjave:

a) U je unitarna;

b) $U^*U = I$;

c) $UU^* = I$.

Najbo $A \in M_{mn}$. V prostoru $\mathbb{K}^n$ standardno ortonormirano bazo (ONB) sestavljajo vektorji:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

V prostoru $\mathbb{K}^m$ pa standardno ONB označimo z

$$\vec f_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \vec f_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec f_m = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Potem je $A\vec e_i = \begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\ \vdots \\a_{mi}\end{bmatrix}$ in tako $\langle A\vec e_i, \vec f_j\rangle = a_{ji}$.

Podobno je $A^*\vec f_j$ enako j-temu stolpcu matrike A^*, torej j-ti vrstici matrike $\bar A$:

$$A^*\vec f_j = \begin{bmatrix}\bar a_{j1}\\ \bar a_{j2}\\ \vdots\\ \bar a_{jn}\end{bmatrix} \quad \text{in tako} \quad \langle A^*\vec f_j, \vec e_i\rangle = \bar a_{ji}.$$

Tako je $\langle A\vec e_i, \vec f_j\rangle = \overline{\langle A^*\vec f_j, \vec e_i\rangle} = \langle \vec e_i, A^*\vec f_j\rangle$

za $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. Če je $\vec x = \sum_{i=1}^n t_i \vec e_i$, je

$$\langle A\vec x, \vec f_j\rangle = \langle A(\sum_{i=1}^n t_i \vec e_i), \vec f_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^n t_i A\vec e_i, \vec f_j\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^n t_i \langle A\vec e_i, \vec f_j\rangle = \sum_{i=1}^n t_i \langle \vec e_i, A^*\vec f_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^n t_i \vec e_i, A^*\vec f_j\rangle =$$
$$= \langle \vec x, A^*\vec f_j\rangle.$$

Če je $\vec y = \sum_{j=1}^m s_j \vec f_j$, je

$$\langle A\vec x, \vec y\rangle = \langle A\vec x, \sum_{j=1}^m s_j \vec f_j\rangle = \sum_{j=1}^m \bar s_j \langle A\vec x, \vec f_j\rangle =$$
$$= \sum_{j=1}^m \bar s_j \langle \vec x, A^*\vec f_j\rangle = \langle \vec x, \sum_{j=1}^m s_j A^*\vec f_j\rangle = \langle \vec x, A^*(\sum_{j=1}^m s_j \vec f_j)\rangle =$$
$$= \langle \vec x, A^*\vec y\rangle.$$

Dobili smo osnovno zvezo:

$$\boxed{\langle A\vec x, \vec y\rangle = \langle \vec x, A^*\vec y\rangle}$$

za vse $\vec x \in \mathbb{K}^n$, $\vec y \in \mathbb{K}^m$.

Def. Če je $A \in M_n$ in $A^* = A$, je A SEBIADJUNGIRANA ali HERMITSKA matrika. (Včasih zato pišejo $A^* = A^H$.)

Če je $A \in M_n(\mathbb{R})$ in je $A = A^T$, je A REALNA SIMETRIČNA.

Vsaka realna simetrična matrika je sebiadjungirana.

Primera: 1. Če je $B \in M_n(\mathbb{C})$, sta $C = \frac{1}{2}(B + B^*)$ in $G = \frac{1}{2i}(B - B^*)$ sebiadjungirani in $B = C + iG$.

2. Če je $B \in M_{mn}$, sta $BB^* \in M_m$ in $B^*B \in M_n$ sebiadjungirani.

Izrek: Lastne vrednosti sebiadjungirane matrike so realne. Lastna vektorja sebiadjungirane matrike, ki pripadata različnima lastnima vrednostma, sta pravokotna.

D. Naj bo $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Potem je

$$\begin{aligned} \langle Ax, x\rangle &= \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle \\ &\parallel \\ \langle x, A^* x\rangle &= \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle. \end{aligned}$$

Iz $\lambda\langle x, x\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle$ sledi $\lambda = \bar{\lambda}$, ker je $\langle x, x\rangle \neq 0$.

Naj bo še $Ay = \mu y$; $y \neq 0$, $\mu \neq \lambda$. Potem je $\mu \in \mathbb{R}$ in

$$\begin{aligned} \langle Ax, y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \\ &\parallel \\ \langle x, A^* y\rangle &= \langle x, Ay\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \bar{\mu}\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

Iz $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ sledi $\langle x, y\rangle = 0$, ker je $\lambda \neq \mu$. $\square$

Izrek: Če je $A = A^* \in M_n$, obstaja ortonormirana baza $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots \vec{g}_n\}$ prostora $\mathbb{K}^n$, sestavljena iz lastnih vektorjev matrike A.

Če je U unitarna matrika, katere stolpci so $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$, in je $A\vec{g}_i = \lambda_i \vec{g}_i$, je

$$\boxed{A = U \operatorname{diag}(\lambda_i) U^*.} \qquad (1)$$

Prvi odstavek izreka bomo privzeli brez dokaza.

Vsekakor je $U\vec{e}_i = \vec{g}_i$, če je $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ standardna ONB za $\mathbb{K}^n$.

Torej je

$$AU\vec{e}_i = A\vec{g}_i = \lambda_i \vec{g}_i = \lambda_i U\vec{e}_i \quad \text{za } i = 1, \dots, n.$$

Pomnožimo enakost $AU\vec{e}_i = \lambda_i U\vec{e}_i$ na levi z $U^* = U^{-1}$:

$$U^*AU\vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i$$

Očitno je $U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, od tod

$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_i) U^*.$$

Zapisu (1) pravimo DIAGONALIZACIJA hermitske matrike A.

Primer: Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Potem je $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda, & 2 \\ 2, & 1-\lambda \end{bmatrix}$ in

$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^2 - 4$. Iz $(\lambda-1)^2 = 2^2$ sledi $\lambda - 1 = \pm 2$, torej $\lambda_1 = 3$ in $\lambda_2 = -1$.

Lastni vektor za $\lambda_1 = 3$ zadošča enačbi $\begin{bmatrix} -2, & 2 \\ 2, & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Od tod je $x = y$ in lastni vektor $x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$. Potrebujemo enotski lastni vektor. Ker je $\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2}$, je $\vec{g}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Lastni vektor k $\lambda_2 = -1$ zadošča enačbi $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Od tod je $x = -y$. Ker je $\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2}$, je ustrezni enotski lastni vektor recimo $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Tako je

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

in

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U^* .$$

Če je $A = U \operatorname{diag}(\lambda_i) U^*$, kjer je U unitarna, je recimo

$$A^2 = U \operatorname{diag}(\lambda_i) \underbrace{U^* \cdot U}_{I} \operatorname{diag}(\lambda_i) U^* =$$

$$= U (\operatorname{diag}(\lambda_i))^2 U^* = U \operatorname{diag}(\lambda_i^2) U^* .$$

Splošno je

$$A^n = U \operatorname{diag}(\lambda_i^n) U^* .$$

Od tod vidimo eno od koristi diagonalizacije.

Tako je recimo za vsako naravno število n

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3^n, & (-1)^n \\ 3^n, & -(-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1, & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3^n + (-1)^n, & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n, & 3^n + (-1)^n \end{bmatrix}.$$

<u>Izrek</u>: Naj bo $A \in M_{mn}$. Potem je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A^*)$.

<u>D.</u> Označimo $r = \operatorname{rang} A = \dim(\operatorname{im} A)$. Naj bo $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_r\}$ ortonormirana baza (ONB) za $\operatorname{im} A$. Potem je $\operatorname{im} A = \operatorname{Lin}\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_r\}$. Dopolnimo množico $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_r\}$ z $\{\vec{g}_{r+1}, \dots, \vec{g}_m\}$ do ONB za $\mathbb{K}^m$.

Za $j \geq r+1$ je $\vec{g}_j \perp \operatorname{im} A$, torej $\langle A\vec{x}, \vec{g}_j \rangle = \langle \vec{x}, A^*\vec{g}_j \rangle = 0$ za vse $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$. Če postavimo $\vec{x} = A^*\vec{g}_j$, vidimo, da je $A^*\vec{g}_j = 0$ za $j \geq r+1$. Ker je vsak $\vec{y} \in \mathbb{K}^m$ enak $\vec{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j \vec{g}_j$, je $A^*\vec{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j A^*\vec{g}_j = \sum_{j=1}^{r} y_j A^*\vec{g}_j =$
$= A^*\left(\sum_{j=1}^{r} y_j \vec{g}_j\right)$. Od tod je

$$\operatorname{im} A^* = A^*(\operatorname{Lin}\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_r\}) = A^*(\operatorname{im} A).$$

Če je $\vec{y} \in \operatorname{im} A$ in $A^*\vec{y} = 0$, je $\langle A^*\vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, A\vec{x} \rangle = 0$ za vse $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, torej $\vec{y} \perp \operatorname{im} A$. Od tod je $\vec{y} \perp \vec{y}$ in zato $\vec{y} = 0$.

Zato je preslikava A^*, omejena na $\operatorname{im} A$, injektivna. Torej je $\operatorname{rang}(A^*) = \dim(\operatorname{im} A^*) = \dim(A^*(\operatorname{im} A)) = \dim(\operatorname{im} A) = \operatorname{rang} A$. $\square$

NALOGE

1. Izračunaj $\bar{A}$, A^*, A^*A in AA^*, če je:

a) $A = \begin{bmatrix} 1, & i \\ 2, & 1-i \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0, & -i, & 1+i \\ 2-i, & 0, & -1 \end{bmatrix}$

c) V primeru (a) zapiši A v obliki $M + iN$, kjer sta M, N sebiadjungirani matriki.

2. Določi $U \in M_3$, da bo U unitarna in $U\vec{i} = \frac{1}{3}(2,2,-1)$, $U\vec{j} = \frac{1}{3}(2,-1,2)$.

3. Diagonalna matrika $D = \mathrm{diag}(d_1, .., d_n)$ je:

a) hermitska; b) unitarna; c) hermitska in unitarna.

Kaj lahko rečeš o številih $d_1, .., d_n$?

4. Naj bosta U, V unitarni matriki. Ali je unitarna matrika:

a) U^{-1}; b) UV; c) U^*?

* 5. Naj bosta A, B matriki, λ skalar. Izračunaj:

a) $\bar{\bar{A}}$; b) $\overline{A+B}$; c) $\overline{\lambda A}$; d) $(\bar{A})^*$

e) $\overline{(A^*)}$; f) $(A^T)^*$; g) $(A^*)^T$; h) $\overline{(A^T)}$.

6. Diagonaliziraj matrike:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0, & -i \\ i, & 0 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 5, & -1 \\ -1, & 5 \end{bmatrix}$

7. Ali je matrika $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ \sin\alpha, & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

a) unitarna;

b) sebiadjungirana?

c) Za katere α je A diagonalna matrika?

d) Določi lastne vrednosti matrike A. Kakšno zvezo ima to z nalogo 3?

* e) Določi enotske lastne vektorje matrike A in diagonaliziraj matriko A.

8. Če je

$$A = \begin{bmatrix} -6+2i & -4i & 4-3i \\ -2+6i & 4+3i & 4i \\ 1 & -2+6i & 6-2i \end{bmatrix},$$

izračunaj A^*A. Kaj lahko rečeš o matriki $B = \frac{1}{9}A$?