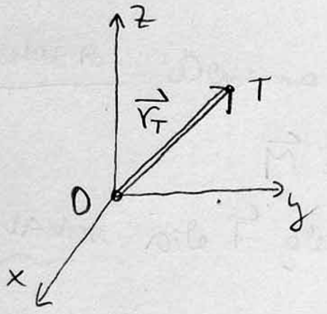
6. ANALITIČNA GEOMETRIJA V PROSTORU

V prostoru imamo pravokotni koordinatni sistem z izhodiščem O.

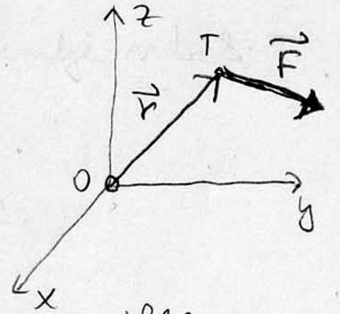
KRAJEVNI VEKTOR točke $T(x,y,z)$ je vektor (slika 1)

$$\boxed{\overrightarrow{OT} = \vec{r}_T = \vec{r} = (x,y,z).}$$

Njegove koordinate so ravno koordinate točke T. V tem smislu bomo od zdaj naprej identificirali točko in njen krajevni vektor. Trojici $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ rečemo tudi algebraični vektor (v $\mathbb{R}^3$).



Slika 1.



Slika 2

PRIMER: Denimo, da sila $\vec{F}$ prijemlje v točki T. Potem je

$$\vec{M} = \vec{r}_T \times \vec{F}$$

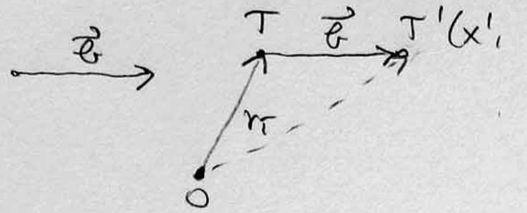
NAVOR sile $\vec{F}$ glede na izhodišče.

Če imamo v T točkasto maso m, ki se giblje s hitrostjo $\vec{v}$, je

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

VRTILNA KOLIČINA glede na izhodišče.

VZPOREDNI PREMIK za vektor $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ točki $T(x,y,z)$ priredi točko $T'(x',y',z')$, tako da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{b}$ (slika 3).



Očitno je $\vec r_{T'} = (x',y',z') = \vec r_T + \vec b = (x,y,z) + (b_1,b_2,b_3)$.

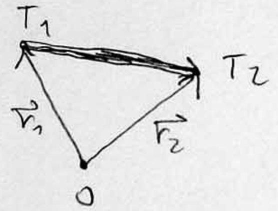
Torej je

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x+b_1 \\ y' &= y+b_2 \\ z' &= z+b_3. \end{aligned}} \qquad \boxed{\vec r \mapsto \vec r + \vec b.}$$

Za vzporedni premik uporabljamo tudi besedo TRANSLACIJA.

RAZDALJA MED TOČKAMA

Naj bosta $T_1(x_1,y_1,z_1)$ in $T_2(x_2,y_2,z_2)$ točki v prostoru, $\vec r_1$ krajevni vektor za T_1 in $\vec r_2$ krajevni vektor za T_2 (slika 1):



Slika 1

Vsekakor je $\vec r_1 + \overrightarrow{T_1T_2} = \vec r_2$, zato

$$\boxed{\overrightarrow{T_1T_2} = \vec r_2 - \vec r_1 = (x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1).}$$

Razdalja med T_1 in T_2 je torej $\boxed{d(T_1,T_2) = \|\vec r_2 - \vec r_1\|}$ ali

$$\boxed{\|\overrightarrow{T_1T_2}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

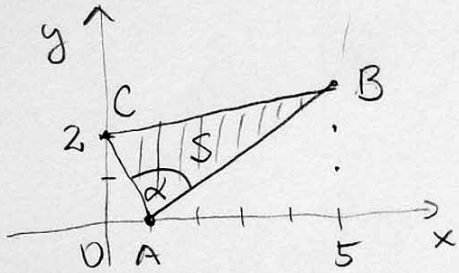
PRIMER: Naj bo S sfera s središčem v točki $A(a_1,a_2,a_3)$ in s polmerom R. Potem je $T(x,y,z) \in S$ natanko tedaj, ko je $|TA| = R$. Če pišemo $\vec r = (x,y,z)$ in $\vec a = (a_1,a_2,a_3)$, je torej

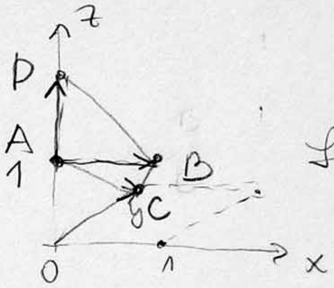
$$\boxed{\begin{aligned} &\|\vec r - \vec a\| = R \\ \text{ali}\quad &(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2 = R^2. \end{aligned}}$$

To je enačba sfere S: točka (x,y,z) leži na S natanko tedaj, ko njene koordinate zadoščajo zgornji enačbi.

PRIMERI: 1. V ravnini xy imamo trikotnik ABC z oglišči $A(1,0)$, $B(5,3)$ in $C(0,2)$. Določimo ploščino trikotnika in kot α pri oglišču A (slika 2).

Slika 2





Slika 3

Rešitev: Na sliki 2 je $\vec{c} = \vec{AB} = (5,3)-(1,0) = (4,3)$ in $\vec{b} = \vec{AC} = (0,2)-(1,0) = (-1,2)$. Od tod je

$$\vec{c}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 11\vec{k}.$$

Tako je iskana ploščina $S = \frac{1}{2}\|\vec{c}\times\vec{b}\| = \underline{\underline{\frac{11}{2}}}$.

Izračunajmo še $c = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, $b = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$, $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = (-1)4 + 2\cdot 3 = 2$. Tako je

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle}{cb} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

in tako $\alpha = \underline{\underline{\arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)}} \approx 79{,}695^\circ$.

2. Določimo prostornino tetraedra z oglišči $A(0,0,1)$, $B(1,0,1)$, $C(0,1,0)$ in $D(0,0,2)$ (slika 3).

Rešitev: Tetraeder je napet na vektorje $\vec{AB} = (1,0,1)-(0,0,1) = (1,0,0)$, $\vec{AC} = (0,1,0)-(0,0,1) = (0,1,-1)$ in $\vec{AD} = (0,0,2)-(0,0,1) = (0,0,1)$.

Zato je njegova prostornina $V = \frac{1}{6} \left|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})\right|$.

Tu je

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

zato je $V = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$.