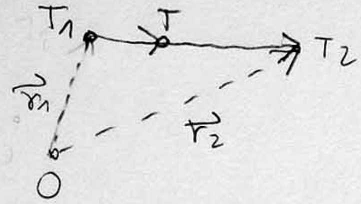
7. DALJICA, PREMICA

Naj bosta $T_1(x_1,y_1,z_1)$ in $T_2(x_2,y_2,z_2)$ dve različni točki v prostoru. Točka $T(x,y,z)$ leži na daljici T_1T_2 natanko tedaj, ko je (slika 1) $\overrightarrow{T_1T} = \lambda\overrightarrow{T_1T_2}$ za neki $\lambda \in [0,1]$.

Slika 1:



Slika 2

Če je $\vec{r} = (x,y,z)$, $\vec{r}_1 = (x_1,y_1,z_1)$ in $\vec{r}_2 = (x_2,y_2,z_2)$, je $\overrightarrow{T_1T_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ in $\overrightarrow{T_1T} = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Tako je $\vec{r} = \vec{r}_1 + \overrightarrow{T_1T}$, se pravi

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \lambda\vec{r}_2 + (1-\lambda)\vec{r}_1 \quad ; \lambda \in [0,1]}$$

Tako je

$$x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2;$$
$$y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2;$$
$$z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2.$$

Če točka T deli daljico T_1T_2 v razmerju $m:n$, je

$$|T_1T| : |TT_2| = m : n$$

in od tod $|TT_2| = \frac{n}{m}|TT_1|$, zato $|T_1T_2| = |T_1T| + |TT_2| = \left(\frac{n}{m}+1\right)|T_1T| = \frac{n+m}{m}|T_1T|$. Tako je

$$|T_1T| = \frac{m}{n+m}|T_1T_2|$$

in od tod $\overrightarrow{T_1T} = \frac{m}{n+m}\overrightarrow{T_1T_2}$. V prejšnjih formulah je torej

$$\lambda = \frac{m}{n+m}.$$

Če je $m = n = 1$, je T razpolovišče daljice T_1T_2. V tem primeru je

$$\boxed{\vec{r} = \tfrac{1}{2}\vec{r}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{r}_2}.$$

ali

$$x = \frac{x_1+x_2}{2},$$
$$y = \frac{y_1+y_2}{2}$$
$$z = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

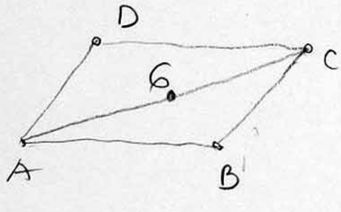
Def. Množica $K \subset \mathbb{R}^3$ je KONVEKSNA, če hkrati z vsakima dvema točkama vsebuje tudi daljico med njima. Se pravi, če sta $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in K$ in $\lambda \in [0,1]$, je tudi $(1-\lambda)\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2 \in K$.

PRIMERI: 1. Točke $A(3,2,0)$, $B(-2,1,0)$ in $C(1,-4,3)$ so oglišča paralelograma $ABCD$. Določimo točko D in razpolovišče G diagonal paralelograma.

Rešitev: $\vec{AD} = \vec{BC} = (1,-4,3)-(-2,1,0) = (3,-5,3)$.

Tako je $\vec{r}_D = \vec{r}_A + \vec{AD} = (3,2,0)+(3,-5,3) = (6,-3,3)$ in

$D(6,-3,3)$.

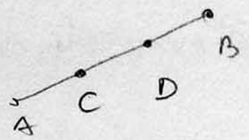


Ker je G razpolovišče daljice AC, ima G koordinate

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(2,-1,\frac{3}{2}\right).$$

2. Imamo točki $A(-8,-5,2)$ in $B(10,4,8)$. Določimo točki C, D, ki razdelita daljico AB na tri enake dele.

Rešitev: $\vec{AB} = (10,4,8) - (-8,-5,2) = (18,9,6)$.



$\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB} = (6,3,2)$, $\vec{AD} = 2\vec{AC} = (12,6,4)$. Torej je

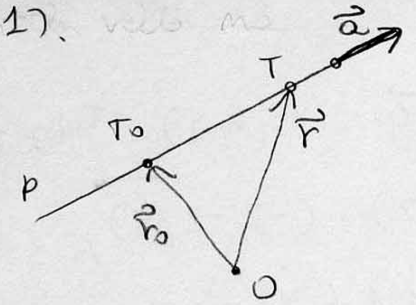
$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \vec{AC} = (-8,-5,2) + (6,3,2) = (-2,-2,4)$,

$\vec{r}_D = (-8,-5,2) + (12,6,4) = (4,1,6)$.

Torej je $\underline{\underline{C(-2,-2,4),\ D(4,1,6)}}$.

ENAČBA PREMICE

Premico najlaže podamo s točko in neničelnim vektorjem na njej. Naj bo T_0 točka na premici p in $\vec{a}$ neničeln vektor na p (slika 1).



Slika 1

Če je $T \in p$ poljubna točka, je $\overrightarrow{T_0T} = t\vec{a}$, kjer je $t \in \mathbb{R}$. Tako je krajevni vektor točke T enak

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Spremenljivki t pravimo *parameter* in to je *parametrična enačba premice*. Ko t preteče realno os, točka $\vec{r}$ preteče našo premico. V koordinatah:

$$x = x_0 + t a_1,$$
$$y = y_0 + t a_2,$$
$$z = z_0 + t a_3.$$

Če so števila a_1, a_2, a_3 vsa od nič različna, je

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}}.$$

Ta način zapisave ni tako splošen in uporaben kot parametrični način.

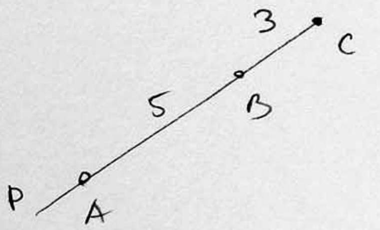
Če sta $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ dve različni točki, je enačba premice skoznju:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

saj je $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ vektor na premici.

Premici z enačbama $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, $\vec{r} = \vec{r}_1 + s\vec{b}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ sta vzporedni natanko tedaj, ko sta vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearna.

PRIMER: Določimo enačbo premice p skozi točki $A(-9,-3,0)$ in $B(1,2,5)$. Določimo še $C \in p$, tako da je $|AB| : |BC| = 5 : 3$, pri čemer C ne leži na daljici AB.



Slika 2

Rešitev: $\vec{AB} = (1,2,5) - (-9,-3,0) = (10,5,5)$. Torej je enačba premice p:

$$\vec{r} = (-9,-3,0) + t(10,5,5). \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Prav tako dobra enačba za p je

$$\vec{r} = (1,2,5) + s(2,1,1), \qquad (s \in \mathbb{R})$$

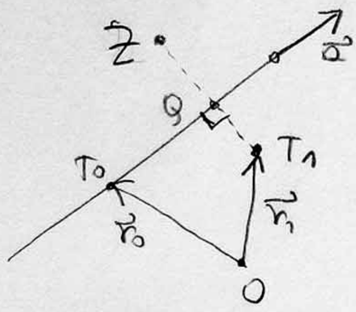
saj je $B(1,2,5)$ točka na p in vektor $(2,1,1)$, kolinearen vektorju $(10,5,5)$, prav tako leži na p.

Iz slike 2 je jasno, da je $\vec{BC} = \frac{3}{5}\vec{AB} = (6,3,3)$.

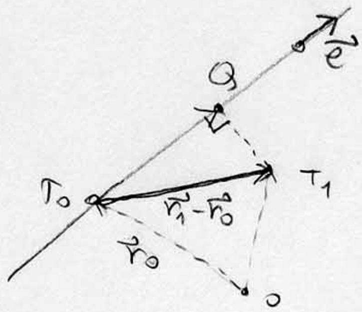
Torej je $\vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{BC} = (1,2,5) + (6,3,3)$ in torej $C(7,5,8)$.

Vzemimo premico p z enačbo $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ $(t \in \mathbb{R})$ in točko T_1 s krajevnim vektorjem $\vec{r}_1$, ki ne leži na p. Obstaja natanko ena ravnina Π, ki vsebuje p in T_1. V tej ravnini (slika 3) bomo

1) pravokotno projicirali točko T_1 na p;
2) določili razdaljo med T_1 in p;
3) prezrcalili T_1 čez p.



Slika 3



Slika 4

Naj bo Q pravokotna projekcija točke T_1 na p. Naj bo $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{a}$ enotski vektor na p. Potem je $\overrightarrow{T_0Q}$ pravokotna projekcija vektorja $\overrightarrow{T_0T_1}$ na p (slika 4), torej

$$\boxed{\overrightarrow{T_0Q} = \langle \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{e} \rangle \vec{e}\,.}$$

Od tod je krajevni vektor točke Q enak $\vec{r}_0 + \overrightarrow{T_0Q}$, torej

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_0 + \langle \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{e} \rangle \vec{e}\,.$$

Razdalja med T_1 in p je potem $\|\overrightarrow{T_1Q}\| = \|\vec{r}_Q - \vec{r}_1\|$.

Če je Z zrcalna slika točke T_1 glede na p, je Q razpolovišče daljice T_1Z, torej

$$\vec{r}_Q = \frac{1}{2}(\vec{r}_Z + \vec{r}_1).$$

Od tod je

$$\vec{r}_Z = 2\vec{r}_Q - \vec{r}_1\,.$$

Do točke Q lahko pridemo tudi takole. Ker Q leži na p, je

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad (1)$$

obenem pa je $(\vec{r}_Q - \vec{r}_1) \perp \vec{a}$, se pravi

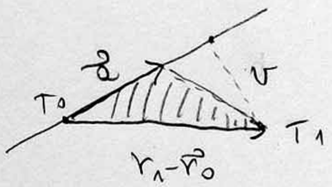
$$\langle \vec{r}_0 + ta - \vec{r}_1, \vec{a} \rangle = 0$$

ali

$$\langle \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a} \rangle + ta^2 = 0$$

Od tod izračunamo vrednost parametra t in to nesemo v (1).

Razdalja v med T_1 in p je višina trikotnika na sliki 4.



Slika 4

Ploščina trikotnika je $\frac{1}{2}|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{a}| = \frac{1}{2} av$. Torej je

$$v = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{a}|}{a}.$$

PRIMER: Naj bo premica p dana z enačbo

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}.$$

Določimo pravokotno projekcijo Q točke $T_1(5,10,4)$ na p, razdaljo med T_1 in p in zrcalno sliko Z točke T_1 glede na p.

Rešitev: Pišimo

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5} = t,$$

pa je

$$x = 1+2t, \quad y = 2+4t, \quad z = 3+5t,$$

se pravi

$$\vec{r} = (1,2,3) + t\,(2,4,5) = \vec{r}_0 + t\vec{a},$$

kjer je $\vec{r}_0 = (1,2,3) = \vec{r}_{T_0}$ za $T_0 \in p$ in $\vec{a} = (2,4,5)$ vektor na premici.

Ker je $a = \sqrt{2^2+4^2+5^2} = \sqrt{45}$, je enotski vektor na p enak

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{45}}(2,4,5).$$

Izračunamo $\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (5,10,4) - (1,2,3) = (4,8,1)$ in

$$\langle \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{e} \rangle \vec{e} = \langle \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \frac{\vec{a}}{a} \rangle \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{a^2} \langle \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a} \rangle \vec{a} =$$

$$= \frac{1}{45}\left(4\cdot 2 + 8\cdot 4 + 1\cdot 5\right)\vec{a} = 1\cdot\vec{a} = (2,4,5).$$

Torej je $\vec{r}_Q = (1,2,3) + (2,4,5) = (3,6,8)$ in $\underline{Q(3,6,8)}$.

Od tod je $\vec{r}_Q - \vec{r}_{T_1} = (3,6,8) - (5,10,4) = (-2,-4,4)$ in

$\|\vec{r}_Q - \vec{r}_{T_1}\| = \underline{6}$ razdalja med T_1 in p.

Če je $Z(z_1, z_2, z_3)$ zrcalna slika točke T_1 glede na p, je

$$\vec{r}_Z = 2\vec{r}_Q - \vec{r}_1 = (6,12,16) - (5,10,4) = (1,2,12).$$

Torej je $\underline{Z(1,2,12)}$.