Poglavje IV

Determinanta matrike

1 Definicija

Permutacija je bijektivna preslikava $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. S $\operatorname{sgn} \sigma$ označimo signaturo permutacije σ. Množico vseh permutacij n elementov označimo s Π_n. Definicija signature in osnovne lastnosti permutacij, ki jih bomo uporabljali pri obravnavi determinant, so opisane v dodatku A na koncu učbenika.

Definicija 1.1 Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrika reda n. Potem je njena *determinanta* enaka

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Pi_n} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \ .$$

Determinanta je tako preslikava $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$. Determinanto zapišemo tudi s tabelo

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Za zgled izpišimo vsoto iz definicije za $n = 2$, 3 in 4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & -a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \\ = \quad & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + \\ & +a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + \\ & +a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - \\ & -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - \\ & -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - \\ & -a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}\end{aligned}$$

Ker je število permutacij množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ enako $n!$, gotovo ne bo praktično računati determinanto s pomočjo definicije. O tem nas prepriča že zgled pri $n = 4$.

Preden začnemo s študijem lastnosti determinante, opozorimo na to, da smo determinanti za $n = 2$ in $n = 3$ že srečali v poglavju o vektorjih v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$. Determinanta matrike $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ je enaka mešanemu produktu vektorjev, ki tvorijo stolpce matrike A. Absolutna vrednost $|\det A|$ je potem enaka volumnu paralelepipeda, ki ga določajo stolpci matrike A. Podobno je za $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ absolutna vrednost $|\det A|$ enaka ploščini paralelograma, ki ga določata stolpca matrike A v $\mathbb{R}^2$.

2 Lastnosti determinante

1.) Determinanti matrike in njene transponiranke sta enaki:

$$\det A = \det \left(A^\top\right).$$

Dokaz Velja:

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in\Pi_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} = \\
&= \sum_{\sigma\in\Pi_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = \\
&= \det\left(A^\top\right) .
\end{aligned}$$

V zgornjem računu smo uporabili dejstvo, da je $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$. ■

2.) Če eno vrstico v matriki pomnožimo s skalarjem α, se determinanta pomnoži z α.

Dokaz Velja:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\Pi_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \alpha \det A .$$ ■

3.) Če en stolpec v matriki pomnožimo s skalarjem α, se determinanta pomnoži z α.

Dokaz Ker je $\det A = \det\left(A^\top\right)$ po ***1.)***, lastnost ***3.)*** sledi iz lastnosti ***2.)***. ■

4.) Če matriko pomnožimo s skalarjem, potem velja

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

Dokaz Uporabimo lastnost ***2.)*** n-krat. ■

5.) Velja:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dokaz Lastnost ***5.)*** sledi iz enakosti

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma\in\Pi_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i-1,\sigma(i-1)}(a_{i\sigma(i)}+b_{i\sigma(i)})a_{i+1,\sigma(i+1)}\cdots a_{n\sigma(n)} = \\ = &\sum_{\sigma\in\Pi_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i-1,\sigma(i-1)}a_{i\sigma(i)}a_{i+1,\sigma(i+1)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \\ &+\sum_{\sigma\in\Pi_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i-1,\sigma(i-1)}b_{i\sigma(i)}a_{i+1,\sigma(i+1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\ . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

6.) Če v matriki zamenjamo dve vrstici, se njena determinanta pomnoži z (-1).

Dokaz Predpostavimo, da zamenjamo i-to in j-to vrstico, kjer je $i<j$. Če je $\sigma\in\Pi_n$, potem s $\tilde{\sigma}$ označimo permutacijo, za katero je

$$\tilde{\sigma}(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{, če } k\neq i,j \\ \sigma(i) & \text{, če } k=j \\ \sigma(j) & \text{, če } k=i \end{cases} .$$

Iz lastnosti permutacij vemo, da je $\operatorname{sgn}\tilde{\sigma} = -\operatorname{sgn}\sigma$. Z uporabo definicije determinante dobimo

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in\Pi_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} = \\
&= \sum_{\sigma\in\Pi_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)} = \\
&= \sum_{\sigma\in\Pi_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\tilde\sigma(1)}\cdots a_{i\tilde\sigma(i)}\cdots a_{j\tilde\sigma(j)}\cdots a_{n\tilde\sigma(n)} = \\
&= \sum_{\sigma\in\Pi_n} -\operatorname{sgn}\tilde\sigma\, a_{1\tilde\sigma(1)}\cdots a_{i\tilde\sigma(i)}\cdots a_{j\tilde\sigma(j)}\cdots a_{n\tilde\sigma(n)} = -\det\tilde A \ .
\end{aligned}$$

Tu smo z $\tilde A$ označili matriko, ki jo iz A dobimo tako, da zamenjamo i-to in j-to vrstico. ■

7.) Če sta dve vrstici v matriki A enaki, potem je njena determinanta enaka 0.

Dokaz Če v matriki enaki vrstici zamenjamo, se matrika ne spremeni. Iz lastnosti ***6.)*** potem sledi, da je $\det A = -\det A$. Zato je $\det A = 0$.■

8.) Če v matriki prištejemo skalarni večkratnik ene vrstice drugi vrstici, se determinanta ne spremeni.

Dokaz Z uporabo lastnosti ***2.)***, ***5.)*** in ***7.)*** dobimo

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1}+\alpha a_{i1} & a_{j2}+\alpha a_{i2} & \dots & a_{jn}+\alpha a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}. \qquad \blacksquare
$$

9.) Velja

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j}+b_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2j}+b_{2j} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj}+b_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_{2j} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

10.) Če v matriki zamenjamo dva stolpca, se njena determinanta pomnoži z (-1).

11.) Če sta dva stolpca v matriki enaka, je njena determinanta enaka 0.

12.) Če v matriki prištejemo skalarni večkratnik enega stolpca drugemu stolpcu, se njena determinanta ne spremeni.

Lastnosti **9.)**, **10.)**, **11.)** in **12.)** sledijo iz lastnosti **5.)**, **6.)**, **7.)** in **8.)** z uporabo lastnosti **1.)**.

3 Razvoj determinante

Minor je poddeterminanta determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

ki jo dobimo tako, da izpustimo enako število vrstic in stolpcev. Če v determinanti izpustimo i-to vrstico in j-ti stolpec, potem dobljeni minor označimo z m_{ij}. *Kofaktor* k_{ij} je predznačen minor:

$$k_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \quad \text{za } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Zgled 3.1 V determinanti $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ poiščimo nekaj minorjev in kofaktorjev:

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad , \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \quad , \quad m_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$k_{11} = m_{11} = -3 \quad , \quad k_{23} = -m_{23} = 7 \quad , \quad k_{31} = m_{31} = 1 \ . \quad \square$$

Izrek 3.2 (**o razvoju determinante**) *Za determinanto*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

velja:

1.) (razvoj po i-ti vrstici) $\det A = a_{i1}k_{i1} + a_{i2}k_{i2} + \ldots + a_{in}k_{in}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

2.) (razvoj po j-tem stolpcu) $\det A = a_{1j}k_{1j} + a_{2j}k_{2j} + \ldots + a_{nj}k_{nj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Zgled 3.3 Izračunajmo $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ z razvojem po prvem stolpcu:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-3) - 0(-4) + 3 \cdot 1 = \\ &= -3. \end{aligned}$$
$\square$

4 Računanje determinante

Če je $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$ diagonalna matrika, potem je njena determinanta enaka produktu diagonalnih elementov: $\det D = \prod_{i=1}^{n} d_i$. To sledi iz definicije, saj za vsako neidentično permutacijo σ obstaja tak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, da je $\sigma(i) \neq i$.

Še več, za vsako neidentično permutacijo σ obstaja tak i, da je $\sigma(i) < i$. To dejstvo uporabimo za dokaz naslednje trditve:

Trditev 4.1 *Če je* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *zgornje-trikotna matrika, potem je* $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Ker je determinanto zgornje-trikotne matrike lahko izračunati, bomo to s pridom uporabili. Izkaže se, da lahko s pomočjo elementarnih transformacij na vrsticah tipa I in III kvadratno matriko A preoblikujemo v zgornje trikotno matriko T. Pri tem se pri transformaciji tipa I determinanta ne spremeni, pri transformaciji tipa III pa se determinanta pomnoži z (-1).

Zato je $\det A = (-1)^s \det T$, kjer je s število transformacij tipa III, ki smo jih uporabili v postopku preoblikovanja A v T.

Zgled 4.2 Izračunajmo determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Najprej zamenjamo prvo in tretjo vrstico:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Prištejemo dvakratnik prve vrstice zadnji vrstici:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Prištejemo (-2)-kratnik tretje vrstice k zadnji vrstici:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Prištejemo z $(-\frac{1}{2})$ pomnoženo drugo vrstico k tretji vrstici:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Zamenjamo zadnji dve vrstici:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Nazadnje prištejemo trikratnik tretje vrstice k zadnji vrstici in dobimo:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{2} \end{bmatrix}.$$

Ker smo uporabili dve transformaciji tipa III, je

$$\det A = \det T = -86 \ . \qquad \square$$

5 Determinanta produkta

Izrek 5.1 *Če sta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem je*

$$\det AB = \det A \det B \ .$$

Dokaz Označimo $C = AB$. Naj bodo $c_1, c_2, \ldots, c_n$ stolpci matrike C, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ stolpci matrike A in

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Potem je $c_j = \sum_{i_j=1}^n b_{i_j j} a_{i_j}$. Z uporabo lastnosti ***9.)***, ***10.)***, ***11.)*** in ***1.)*** za determinanto dobimo

$$\begin{aligned}
\det C &= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \sum_{i_1=1}^n b_{i_1 1} a_{i_1} & \sum_{i_2=1}^n b_{i_2 2} a_{i_2} & \dots & \sum_{i_n=1}^n b_{i_n n} a_{i_n} \end{vmatrix} = \\
&= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \begin{vmatrix} b_{i_1 1} a_{i_1} & b_{i_2 2} a_{i_2} & \dots & b_{i_n n} a_{i_n} \end{vmatrix} = \\
&= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n b_{i_1 1} b_{i_2 2} \dots b_{i_n n} \begin{vmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \end{vmatrix} = \\
&= \sum_{\sigma \in \Pi_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \dots b_{\sigma(n)n} \begin{vmatrix} a_{\sigma(1)} & a_{\sigma(2)} & \dots & a_{\sigma(n)} \end{vmatrix} = \\
&= \sum_{\sigma \in \Pi_n} \operatorname{sgn} \sigma b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \dots b_{\sigma(n)n} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \\
&= \det A \det \left(B^\top \right) = \det A \det B \ .
\end{aligned}$$

■

Posledica 5.2 *Če je A obrnljiva, potem je*

$$\det \left(A^{-1} \right) = \frac{1}{\det A} \ .$$

Dokaz Ker velja $AA^{-1} = I$ in $\det I = 1$, sledi iz prejšnjega izreka enakost

$$(\det A) \left(\det \left(A^{-1} \right) \right) = 1 \ .$$

Torej je $\det \left(A^{-1} \right) = \frac{1}{\det A}$. ■

Definicija 5.3 Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \ .$$

S k_{ij} označimo (i,j)-ti kofaktor $\det A$. Matriko

$$B_A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}^\top$$

imenujemo *prirejenka matrike A*. ◊

Izrek 5.4 *Matrika* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je obrnljiva natanko tedaj, ko je* $\det A \neq 0$. *Tedaj je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B_A \ .$$

Dokaz Če je A obrnljiva, je $(\det A)\left(\det\left(A^{-1}\right)\right) = \det I = 1$. Zato je $\det A \neq 0$.

Naj bo $\det A \neq 0$. Izračunajmo produkt AB_A: (i,j)-ti element matrike AB_A je enak $\sum_{l=1}^{n} a_{il}k_{jl}$. Po izreku o razvoju determinante je ta vsota enaka $\det A$, če je $i = j$. Če je $i \neq j$, potem je ta vsota razvoj determinante, ki ima i-to in j-to vrstico enako in je zato enaka 0. Tako dobimo

$$AB_A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}.$$

Ker je $\det A \neq 0$, je $A \cdot \left(\frac{1}{\det A} B_A\right) = I$. Zato je $A^{-1} = \frac{1}{\det A} B_A$. ■

Zgled 5.5 Če je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ obrnljiva matrika v $\mathbb{R}^{2\times 2}$, potem je $\det A = ad - bc \neq 0$. Njena prirejenka je $B_A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ in njen inverz je

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Konkretno, če je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, potem je $\det A = -1$ in $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. □

Zgled 5.6 Poiščimo inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

s pomočjo prirejenke.
Velja $\det A = 7$ in

$$B_A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zato je $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. □

6 Cramerjevo pravilo

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika in naj bo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistem linearnih enačb. Za $j = 1, 2, \ldots, n$ označimo z $A_j(\mathbf{b})$ matriko, ki jo dobimo iz A tako, da j-ti stolpec zamenjamo z vektorjem $\mathbf{b}$.

Izrek 6.1 (**Cramerjevo pravilo**) *Če je A obrnljiva matrika v $\mathbb{R}^{n\times n}$, potem je rešitev sistema linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ podana z*

$$x_j = \frac{\det A_j(\mathbf{b})}{\det A} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dokaz Ker je A obrnljiva, iz zveze $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sledi $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det A} B_A \mathbf{b}$. Naj bo $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Potem je j-ta komponenta produkta $B_A\mathbf{b}$ enaka $\sum_{i=1}^{n} k_{ij} b_i$. Po izreku o razvoju determinante je ta vsota enaka $\det A_j(\mathbf{b})$. Zato je

$$x_j = \frac{\det A_j(\mathbf{b})}{\det A} \quad \text{za } j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \blacksquare$$

Zgled 6.2 Rešimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ -5x + 4y &= 8 \end{aligned}$$

s pomočjo Cramerjevega pravila. Velja:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

Ker je $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$, je

$$\det A_1(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 40 \quad \text{in}$$

$$\det A_2(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 54 \ .$$

Zato je rešitev enaka $x = 20$ in $y = 27$. $\square$

Zgled 6.3 S pomočjo Cramerjevega pravila rešimo še sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ -y + 2z &= 0 \\ x + 3z &= -1\,. \end{aligned}$$

Velja:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 + 1 = -4\,.$$

Vektor desne strani je $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, zato je

$$\det A_x(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 - 1 = -2\,,$$

$$\det A_y(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \quad \text{in}$$

$$\det A_z(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2\,.$$

Tako dobimo rešitev $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$ in $z = -\frac{1}{2}$. $\square$