11. DETERMINANTE

PODMATRIKA

Če v matriki A izbrišemo eno ali več vrstic in/ali stolpcev, in preostanek stisnemo skupaj, dobimo PODMATRIKO matrike A.
Če v A izbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec, dobimo podmatriko $A(i|j)$.

PRIMER: Če je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, je

$$A(1|3) = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad A(2|2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Od tu naprej bomo obravnavali le KVADRATNE MATRIKE

Def. Naj bo A kvadratna matrika. Njena determinanta, $\det A$, je število, definirano na naslednji način:
Če je $A \in M_1$, se pravi velikosti 1×1, je $\det A$ edini element te matrike. Za $A \in M_n$ pa REKURZIVNO definiramo:

$$\det A = a_{11}\det(A(1|1)) - a_{12}\det(A(1|2)) + a_{13}\det(A(1|3)) + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(A(1|n)).$$

Torej je

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A(1|j))}.$$

To se ujema z dosedanjimi definicijami za 2×2 in 3×3 matrike:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Determinanto 3×3 matrike pa smo tako in tako definirali na enak način kot tu.

Splošno pišemo, če je $A = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \dots \\ a_{n1}, \dots, a_{nn} \end{bmatrix}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

V povezavi z reševanjem sistemov linearnih enačb najdemo determinante že v kitajskih besedilih iz 3. stoletja pr. Kr. Sicer pa je v 17. stoletju teorijo determinant razvil japonski matematik SEKI, kmalu za njim pa nemški matematik LEIBNIZ.

Opozorimo, da so za $n \geq 4$ determinante $n \times n$ matrik predvsem <u>TEORETIČNO ORODJE</u>. Zato lastnosti determinant ne bomo dokazovali. Marsikatere lahko najdete recimo na HTTP://LINEAR.UPS.EDU ali v drugi literaturi, navedeni na spletni učilnici.

Konec 18. stoletja je francoski matematik LAPLACE odkril RAZVOJ DETERMINANTE PO (i-ti) VRSTICI.

<u>Izrek:</u>

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j))}$$

Pravimo, da je $\det(A(i|j))$ (komplementarni) <u>MINOR</u> elementa a_{ij}.
Število $\boxed{k_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i|j))}$ pa je <u>PODDETERMINANTA</u> ali <u>KOFAKTOR</u> elementa a_{ij}.

Za $i=1$ izreka ni treba dokazati, saj je to definicija determinante.
Kratko lahko Laplaceov razvoj strnemo v:

<u>Determinanta je skalarni produkt i-te vrstice in ustreznih poddeterminant (kofaktorjev):</u>

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_{ij}.$$

20/12

Primer: $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -10 & -2 \\ -5 & 4 & -13 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -7 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} -4 & -10 & -2 \\ -5 & -13 & -7 \\ -1 & -7 & -1 \end{vmatrix} =$

(Razvili smo po tretji vrstici.) Zdaj razvijemo po zadnji vrstici:

$$= -2 \left[(-1) \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -13 & -7 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -4 & -10 \\ -5 & -13 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= -2 \left[-(70 - 26) + 7(28 - 10) - (52 - 50) \right] =$$

$$= -2 \left[-44 + 126 - 2 \right] = -2 \cdot 80 = \underline{\underline{-160}}.$$

LASTNOSTI DETERMINANT:

1. Če v kvadratni matriki A zamenjam dve vrstici, je determinanta dobljene matrike enaka $(-1)\det A$.

2. Če elemente ene od vrstic matrike A pomnožim s skalarjem t, je determinanta dobljene matrike enaka $t \det A$.

3.
$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{i1}+b_{i1}, & a_{i2}+b_{i2}, & \dots, & a_{in}+b_{in} \\ - & - & - & - \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \dots, & a_{in} \\ - & - & - & - \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ b_{i1}, & b_{i2}, & \dots, & b_{in} \\ - & - & - & - \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(Zapisane determinante imajo enake ostale elemente, razen elementov v i-ti vrstici.)

4. Če v matriki A k eni od vrstic prištejem večkratnik druge vrstice (t.j. izvedem elementarno vrstično transformacijo tipa I), se determinanta ne spremeni.

5. $\boxed{\det(A^T) = \det A}$.

6. $\boxed{\det(AB) = \det A \det B}$. $(A, B \in M_n)$.

7. $\boxed{\begin{vmatrix} A & O \\ B & C \end{vmatrix} = (\det A)(\det C),}$

Če sta A, C kvadratni podmatriki, nad C pa so same ničle.

<u>Primer:</u>
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Pridelamo ničli na mestih $(2,1)$ in $(3,1)$: Zadnjo vrstico pomnožimo z -1 in prištejemo drugi (tretji) vrstici. Determinanta se ne spremeni:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Pridelamo ničlo na mestu $(2,1)$:

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-3}}.$$

<u>Primer:</u> Naj bodo x_1, x_2, x_3, x_4 neničelna števila. Izračunajmo

$$\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & a \\ a & a+x_2 & a & a \\ a & a & a+x_3 & a \\ a & a & a & a+x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ -x_2 & a+x_2 & a & a \\ 0 & a & a+x_3 & a \\ 0 & a & a & a+x_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & a \\ -x_2 & x_2 & 0 & a \\ 0 & -x_3 & x_3 & a \\ 0 & 0 & -x_4 & a+x_4 \end{vmatrix} = x_1 x_2 x_3 x_4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{x_1} \\ -1 & 1 & 0 & \frac{a}{x_2} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{a}{x_3} \\ 0 & 0 & -1 & 1+\frac{a}{x_4} \end{vmatrix} =$$

$$= x_1 x_2 x_3 x_4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{x_1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{x_1}+\frac{a}{x_2} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{a}{x_3} \\ 0 & 0 & -1 & 1+\frac{a}{x_4} \end{vmatrix} = x_1 x_2 x_3 x_4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{x_1}+\frac{a}{x_2} \\ 0 & 1 & \frac{a}{x_1}+\frac{a}{x_2}+\frac{a}{x_3} \\ 0 & -1 & 1+\frac{a}{x_4} \end{vmatrix} =$$

$$= x_1 x_2 x_3 x_4 \left(1 + \frac{a}{x_1} + \frac{a}{x_2} + \frac{a}{x_3} + \frac{a}{x_4}\right).$$

Od tod sledi:

8. $$\boxed{\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = (\det A)(\det C),}$$

če sta A, C kvadratni podmatriki, pod A pa so same ničle.

Lastnosti (2) in (3) takoj sledita iz Laplaceovega razvoja po i-ti vrstici. Iz (2) sledi:

9. Če je v matriki A ničelna vrstica, je njena determinanta 0.

Iz (1) sledi takoj:

10. Če sta v matriki A dve vrstici enaki, je njena determinanta enaka 0.

Iz (10) in (3) takoj sledi (4).

Iz (5) sklepamo:

11. V vseh izrekih o determinantah lahko besedo „vrstica" zamenjam s „stolpec". Tako je recimo:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A(i|j)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_{ij}$$

se pravi det A je skalarni produkt j-tega stolpca z ustreznimi poddeterminantami.

12. Determinanta trikotne matrike je produkt diagonalnih elementov.

Za spodnjo trikotno matriko to takoj sledi iz definicije:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \cdots & 0 \\ & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \cdots & 0 \\ & & & \\ \cdots & & & \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn},$$

Za zgornjo trikotno matriko pa najprej uporabimo (5).

Od tod je
$$\boxed{\det I = 1}.$$

Če je $A \in M_n$, je po (2)
$$\det(tA) = t^n \det A.$$

<u>Primer</u>: Koliko je VANDERMONDOVA determinanta
$$V(x,y,z,w) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix}$$

enaka 0 ?

R. Če sta dve od števil x, y, z, w enaki, sta dva stolpca enaka in zato $V = 0$. Videli bomo, da je to edina možnost, da je $V = 0$.

Računajmo: (odštejmo prvi stolpec od preostalih):

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x & w-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 & w^2-x^2 \\ x^3 & y^3-x^3 & z^3-x^3 & w^3-x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x & w-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 & w^2-x^2 \\ y^3-x^3 & z^3-x^3 & w^3-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(w-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+x & z+x & w+x \\ y^2+xy+x^2 & z^2+xz+x^2 & w^2+wx+x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(w-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y+x & z-y & w-y \\ y^2+xy+x^2 & z^2-y^2+x(z-y) & w^2-y^2+x(w-y) \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(w-x) \begin{vmatrix} z-y & w-y \\ (z-y)(z+y+x) & (w-y)(w+y+x) \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(w-x)(z-y)(w-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+y+z & x+y+w \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{(y-x)(z-x)(w-x)(z-y)(w-y)(w-z)}$$

Vidimo, da je $V = 0$ natanko takrat, ko sta dve od števil x, y, z, w enaki.

GEOMETRIJSKI POMEN DETERMINANTE

Naj bosta $\vec{u}=(u_1,u_2)$ in $\vec{v}=(v_1,v_2)$ vektorja v ravnini xy. Potem je

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & 0\\ v_1 & v_2 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

Ploščina S paralelograma, napetega na $\vec{u}$ in $\vec{v}$, je enaka $|\vec{u}\times\vec{v}|$, torej je

$$S = \left|\det\begin{bmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{bmatrix}\right|$$

Naj bodo $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ in $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ vektorji v $\mathbb{R}^3$. Potem je mešani produkt

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{bmatrix}$$

Prostornina V paralelepipeda, napetega na $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je

$$V = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|.$$

Torej je

$$V = \left|\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}\right|.$$