D. DIAGONALIZACIJA KVADRATNE MATRIKE

Denimo, da za matriko A razsežnosti $n \times n$ lahko najdemo
<u>n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$</u> (kar ni
vedno mogoče!). Vemo, da je

$$\boxed{A\vec{f}_i = \lambda_i \vec{f}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A.
<u>Matrika P naj ima za stolpce lastne vektorje $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$.</u>
Ker so $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ linearno neodvisni, je rang $P = n$ in P <u>obrnljiva</u>
$n \times n$ matrika, ki ji rečemo PREHODNA MATRIKA.

Stolpci matrike P so slike baznih vektorjev $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$,
$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ itd. Torej je

$$\boxed{P\vec{e}_i = \vec{f}_i} \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Upoštevamo (2) v (1):

$$AP\vec{e}_i = \lambda_i P\vec{e}_i = P(\lambda_i \vec{e}_i).$$

Pomnožimo na levi s P^{-1}:

$$P^{-1}AP\vec{e}_i = (P^{-1}P)(\lambda_i \vec{e}_i) = I(\lambda_i \vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i.$$

Matrika P ima za stolpce $\lambda_1 \vec{e}_1, \lambda_2 \vec{e}_2, \ldots, \lambda_n \vec{e}_n$, torej je <u>diagonalna</u>:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_i) = D.$$

Pomnožimo enakost $P^{-1}AP = D$ na levi s P in na desni s P^{-1}:

$$\underbrace{PP^{-1}}_{I}A\underbrace{PP^{-1}}_{I} = PDP^{-1}$$

Ker je $IA = AI = A$, je $A = PDP^{-1}$ ali

$$\boxed{A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1}.}$$

Temu razcepu matrike A pravimo DIAGONALIZACIJA. (Če matriko lahko diagonaliziramo, lahko to storimo na več načinov.)

<u>Primer:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Izračunajmo karakteristični polinom in njegove ničle:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda, & 4 \\ 1, & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda-1)^2 - 4 = 0.$$

Od tod je $\lambda - 1 = \pm 2$ in $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Lastni vektor za $\lambda_1 = -1$ zadošča sistemu: $(A-(-1)I)\vec{f}_1 = 0$ ali $(A+I)\vec{f}_1 = 0$, torej

$$\begin{bmatrix} 1+1, & 4 \\ 1, & 1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ali } x + 2y = 0.$$

Če je $y = 1$, je $x = -2$ in tako lastni vektor $\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lastni vektor za $\lambda_2 = 3$ zadošča sistemu $(A-3I)\vec{f}_2 = 0$ ali

$$\begin{bmatrix} 1-3, & 4 \\ 1, & 1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Torej $x - 2y = 0$. Če je $y = 1$, je $x = 2$ in $\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Prehodna matrika ima za stolpca $\vec{f}_1$ in $\vec{f}_2$:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tako je $P\vec{e}_1 = \vec{f}_1$ in $P\vec{e}_2 = \vec{f}_2$. Prepišemo:

$A\vec{f}_1 = (-1)\vec{f}_1 \sim AP\vec{e}_1 = (-1)P\vec{e}_1$ ali $P^{-1}AP\vec{e}_1 = (-1)\vec{e}_1$;

$A\vec{f}_2 = 3\vec{f}_2 \rightarrow AP\vec{e}_2 = 3P\vec{e}_2$ ali $P^{-1}AP\vec{e}_2 = 3\vec{e}_2$.

Tako ima $P^{-1}AP$ za stolpca $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, torej je

$$P \,/\quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad /P^{-1}$$

$$A = P\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} -2, & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2, & 2 \\ 1, & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Lahko izračunamo $\begin{bmatrix} -2, & 2 \\ 1, & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(Če bi vzeli drugačen vrstni red lastnih vrednosti $(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1)$ ali druge lastne vektorje – namesto $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ recimo $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, bi dobili nekoliko drugačen razcep.)

Uporabnost razcepa $A = PDP^{-1}$ se pokaže, ko želimo računati z matriko A. Tako je

$$A^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1} = P\underbrace{DID}_{D^2}P^{-1} = PD^2P^{-1},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = PD^2P^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

Splošno je $\quad A^k = PD^kP^{-1}$.

Ker je $D = \mathrm{diag}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$, je

$$D^2 = \mathrm{diag}(\lambda_i^2) = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \lambda_2^2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$

spet diagonalna matrika. V našem primeru je recimo

$$A^{11} = P \begin{bmatrix} (-1)^{11} & 0 \\ 0 & 3^{11} \end{bmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

To je diagonalizacija za A^{11}.

<u>Opomba</u>. V prejšnjem razdelku smo v Primeru 2 imeli matriko $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, ki je imela le dva linearno neodvisna lastna vektorja. Zato te matrike ne moremo diagonalizirati!

NALOGE

1. Določi lastne vrednosti, lastne vektorje in diagonaliziraj matriko:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 5, & -1 \\ 8, & -1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Z rezultati naloge 1 napiši diagonalizacijo za:

a) B^6 ; b) C^{11} ; d) C^{-1}.

* 3. V nalogi 4d v prejšnjem razdelku smo imeli matriko $N = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Pokaži, da matrike D ne moremo diagonalizirati.

4. a) Določi lastne vrednosti in lastne vektorje za matriko $L = \begin{bmatrix} 3+i, & -1 \\ 2i, & 1-i \end{bmatrix}$.

* b) Ali matriko L lahko diagonaliziramo?