10. INVARIANTNI PODPROSTORI IN LASTNE VREDNOSTI

Def. Naj bo $A : X \to X$ linearen operator. Linearni podprostor $Y \subseteq X$ je INVARIANTEN ZA A, če je $AY \subseteq Y$, se pravi $Ay \in Y$ za vsak $y \in Y$ (torej A preslika Y vase.)

Primeri: 1. Naj bo p premica skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$ in A vrtenje za kot φ okrog p. Potem je p invarianten podprostor za A. Tudi ravnina skozi izhodišče, pravokotna na p, je invariantna za A. Če je $\varphi = 180°$, je A zrcaljenje čez p. V tem primeru je tudi vsaka ravnina, ki vsebuje p, invariantna za A.

2. Naj bo Σ ravnina v $\mathbb{R}^3$ in $0 \in \Sigma$. Naj bo Z zrcaljenje čez Σ. Potem je Σ invarianten podprostor za Z. Tudi premica q skozi izhodišče, ki je pravokotna na Σ, je invariantna za Z.

Če je $A : X \to X$ linearen operator, sta seveda $\{0\}$ in X invariantna podprostora za A. Velja pa tudi:

Jedro in zaloga vrednosti linearnega operatorja A sta invariantna podprostora za A.

Def. Naj bo $A : X \to X$ linearen operator. Neničelni vektor $x \in X$ je LASTNI VEKTOR za A, če je

$$\boxed{Ax = \lambda x \quad (x \neq 0)}.$$

Število λ je LASTNA VREDNOST za A, prirejena vektorju x.

Če je x lastni vektor, je tudi vsak večkratnik $\underline{tx\ (t \neq 0)}$ lastni vektor za isto lastno vrednost. Vsak lastni vektor x torej razpenja enorazsežen invariantni podprostor $\mathbb{K}x$. Očitno je iskanje lastnih vektorjev enakovredno iskanju enorazsežnih invariantnih podprostorov.

Naj bo I identični operator na X: $Ix = x$ za vsak $x \in X$. Potem lahko enačbo $Ax = \lambda x$ prepišemo v

$$\boxed{(A - \lambda I)x = 0}$$

Torej je x v jedru operatorja $A - \lambda I$.

<u>Število λ je lastna vrednost operatorja A natanko tedaj, ko je $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$.</u> Linearni podprostor $\ker(A - \lambda I)$ je <u>LASTNI PODPROSTOR</u> operatorja A, ki pripada lastni vrednosti λ. Vsak <u>neničelni</u> vektor v $\ker(A - \lambda I)$ je lastni vektor za A.

Naj bo X končno razsežen. Potem je $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$ natanko tedaj, ko $A - \lambda I$ ni obrnljiv, torej natanko tedaj, ko matrika za $A - \lambda I$ (v kakršnikoli bazi) ni obrnljiva, torej

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Če je matrika za A enaka

$$\begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \text{-----} \\ a_{n1}, \dots, a_{nn} \end{bmatrix},$$

mora λ zadoščati enačbi

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, & a_{23}, & \dots, & a_{2n} \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & \dots, & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Če si mislimo to determinanto izračunano, dobimo polinom n-te stopnje spremenljivke λ:

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 .$$

(Tu je seveda $c_0 = p(0) = \det A$.) Izkaže se, da je ta polinom neodvisen od izbire baze in ga imenujemo KARAKTERISTIČNI POLINOM operatorja A.

Lastne vrednosti operatorja A so natanko ničle karakterističnega polinoma $\det(A-\lambda I)$.

Če lastne vrednosti matrike A poznamo, dobimo ustrezne lastne vektorje iz enačb

$$\boxed{(A-\lambda I)x = 0,}$$

ki so netrivialno rešljive.

Primer 1: Določimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

R. Karakteristični polinom je

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda, & 8 \\ 3, & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 24 =$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda-8)(\lambda+2).$$

Lastni vrednosti sta ničli karakterističnega polinoma. Iz $(\lambda-8)(\lambda+2)=0$ dobimo $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$. Lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_1 = 8$ je rešitev enačbe:

$$(A-8I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6, & 8 \\ 3, & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dobimo enačbi $-6x+8y=0$, $3x-4y=0$, ki sta ekvivalentni, zato lahko eno odvržemo in dobimo $3x=4y$. Lastni vektor je torej

$$\begin{bmatrix}\frac{4}{3}y\\ y\end{bmatrix} = \frac{y}{3}\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix} \quad (y\neq 0).$$

Lahko torej rečemo, da je lastni vektor za $\lambda_1=8$ enak $\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}=\vec{v}_1$ (ali katerikoli neničelni večkratnik tega vektorja). Množica $\left\{t\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix};\ t\in\mathbb{K}\right\} = \mathbb{K}\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}$ pa je lastni podprostor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1=8$.

Lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_2=-2$ pa je rešitev enačbe:

$$(A+2I)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Od tod je $4x+8y=0$, $3x+6y=0$. Obe enačbi sta enakovredni enačbi $x+2y=0$. Torej je $x=-2y$ in lastni vektor enak

$$\begin{bmatrix}-2y\\ y\end{bmatrix} = y\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix} \quad (y\neq 0).$$

Lastni vektor za $\lambda_2=2$ je torej $\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=\vec{v}_2$ (in vsak neničelni večkratnik tega vektorja.) Ustrezni lastni podprostor je $\mathbb{K}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$.

Velja torej $A\vec{v}_1 = 8\vec{v}_1$ in $A\vec{v}_2 = -2\vec{v}_2$.

<u>Primer 2:</u> Naj bo $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$.

Karakteristični polinom za B je $p(\lambda)=\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda, & 1, & 0\\ 0, & 1-\lambda, & -1\\ 0, & 2, & 4-\lambda\end{vmatrix}=$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda, & -1\\ 2, & 4-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2+2) = (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) =$$

$$=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

Lastni vrednosti sta $\lambda_1=3$ in $\lambda_2=2$ (dvojna ničla karakterističnega polinoma). Lastni vektor za $\lambda_1=3$ zadošča enačbi

$$(B-3I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-2&-1\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Od tod je $2y+z=0$ in $-x+y=0$. Tako je $x=y$, $z=-2y$ in lastni vektor enak $\begin{bmatrix}y\\y\\-2y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ $(y\neq 0)$.

Lastni vektor za $\lambda_2=2$ zadošča enačbi

$$(B-2I)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Od tod je $y=0$ in $-y-z=0$, torej tudi $z=0$. Tako je lastni vektor enak $x\vec{i}=x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ za $x\neq 0$.

Primer 3: Naj bo Σ ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje izhodišče. Naj bo $P:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ pravokotni projektor na Σ. Določimo lastne vrednosti in ustrezne lastne vektorje ter lastne podprostore.

R. Če je $\vec{x}\in\Sigma$, je $P\vec{x}=\vec{x}$. Torej je vsak neničelni vektor v Σ lastni vektor; ustrezna lastna vrednost je 1; njen lastni podprostor je Σ.

Če je $\vec{n}$ normala ravnine Σ, je $P\vec{n}=0$. Torej je $\vec{n}$ lastni vektor za P; ustrezna lastna vrednost je 0; njen lastni podprostor je $\mathbb{R}\vec{n}$.

Primer 4: Naj bo p premica skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$. Naj bo R vrtenje za kot α $(0<\alpha<180^\circ)$ okrog p. Če je $\vec{x}$ neničelni vektor na p, je $R\vec{x}=\vec{x}$ in tako $\vec{x}$ lastni vektor za R; ustrezna lastna vrednost je 1. Lastni podprostor k $\lambda_1=1$ je premica p. Drugih lastnih vrednosti pa R kot operator na $\mathbb{R}^3$ nima.

Če napišemo matriko za R v ortonormirani bazi, katere zadnji element leži na p, je to

$$V = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

To matriko imamo lahko za operator na $\mathbb{C}^3$. Ima lastne vrednosti $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$.

Linearni operator A na X je injektiven natanko tedaj, ko 0 ni lastna vrednost za A.

Posledica: Za kvadratno matriko A so ekvivalentne naslednje lastnosti:

1) 0 je lastna vrednost za A;
2) A je singularna;
3) $\det A = 0$.

Denimo, da ima linearni operator $A : X \to X$ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, kjer je $n = \dim X$. Potem je v bazi, ki jo sestavljajo ti vektorji, matrika operatorja A diagonalna. Elementi na diagonali so ravno ustrezne lastne vrednosti.

Če je v neki bazi matrika linearnega operatorja diagonalna, so diagonalni elementi lastne vrednosti tega operatorja, bazni vektorji pa so lastni vektorji.

D. Če so $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ linearno neodvisni lastni vektorji za A, je $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ baza za X in $A\vec{f}_i = \lambda_i f_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

(Števila $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ niso nujno vsa različna). V bazi $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ je matrika za A enaka

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Denimo zdaj, da je v bazi $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$ matrika za A enaka $\mathrm{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Potem je očitno $A\vec{g}_i = d_i\vec{g}_i$ za $i = 1, \dots, n$. $\square$

Primer 5. Naj bo Σ ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje izhodišče. Naj bo $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez Σ. Če je $\vec{n}$ normala ravnine Σ, je $Z\vec{n} = -\vec{n} = (-1)\vec{n}$. Torej je $\vec{n}$ lastni vektor za Z; ustrezna lastna vrednost je -1. Če je $\vec{x} \in \Sigma$ neničeln vektor, je $Z\vec{x} = \vec{x} = 1 \cdot \vec{x}$. Torej je vsak neničeln vektor v Σ lastni vektor za Z, ustrezna lastna vrednost je 1. Naj bosta $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ linearno neodvisna vektorja v Σ in $\vec{g}_3 = \vec{n}$. Potem je $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ baza za $\mathbb{R}^3$ in $Z\vec{g}_1 = \vec{g}_1$, $Z\vec{g}_2 = \vec{g}_2$, $Z\vec{g}_3 = -\vec{g}_3$. V bazi $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ je matrika za Z enaka

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lastni podprostor za $\lambda = -1$ je $\mathbb{R}\vec{n}$.
Lastni podprostor za $\lambda = 1$ je Σ.

Primer 6 Naj bo $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ker je D diagonalna, so lastne vrednosti za D: $\lambda_{1,2} = 1$ (dvakrat) in $\lambda_3 = -2$. Velja $D\vec{i} = \vec{i}$, $D\vec{k} = \vec{k}$. Torej sta $\vec{i}, \vec{k}$ lastna vektorja za D in ustrezna lastna vrednost je 1. Linearna ogrinjača $\mathrm{Lin}\{\vec{i}, \vec{k}\}$, ki je ravnina xz, je ustrezni lastni podprostor.

Vsak neničelni vektor v ravnini xz je lastni vektor za D.
Ker je $D\vec{j} = -2\vec{j}$, je $\vec{j}$ lastni vektor za D, ki pripada lastni vrednosti -2. Ustrezni lastni podprostor je os y ($= \mathbb{R}\vec{j}$).

Pozor: V primeru 3 smo imeli matriko $B \in M_3$, ki je imela dve lastni vrednosti in le dva linearno neodvisna lastna vektorja. Torej ne obstaja baza v $\mathbb{K}^3$, sestavljena iz lastnih vektorjev za B!

Trditev: Naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_k$ lastni vektorji operatorja A. Če so ustrezne lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ vse različne, so $x_1, x_2, \dots, x_k$ linearno neodvisni.

D. Indukcija na k. Trditev velja za $k = 1$. Denimo, da smo jo dokazali za $k-1$. Naj bo

$$t_1 x_1 + \dots + t_k x_k = 0 \qquad (1).$$

Uporabimo A in upoštevamo, da je $Ax_k = \lambda_k x_k$, pa dobimo:

$$t_1 \lambda_1 x_1 + \dots + t_k \lambda_k x_k = 0 \qquad (2).$$

Pomnožimo (1) z λ_k in odštejmo od (2):

$$t_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \dots + t_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0.$$

Po indukcijski predpostavki so $x_1, \dots, x_{k-1}$ linearno neodvisni. Izrazi v oklepajih so vsi neničelni. Torej je $t_1 = \dots = t_{k-1} = 0$. Po (1) je potem $t_k x_k = 0$ in tako $t_k = 0$. Vektorji $x_1, \dots, x_k$ so torej linearno neodvisni. □

NALOGE

1. Naj bo $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ enaka $5I$, se pravi $A\vec{x} = 5\vec{x}$ za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Določi:

   a) invariantne podprostore za A;

   b) lastne vrednosti in ustrezne lastne vektorje ter lastne podprostore za A.

2. Naj bo $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez izhodišče. Določi:

   a) invariantne podprostore za Z;

   b) lastne vrednosti in ustrezne lastne vektorje ter lastne podprostore za Z.

3. Naj bo p premica v $\mathbb{R}^3$ in W zrcaljenje čez p. Določi:

   a) invariantne podprostore za W;

   b) lastne vrednosti, lastne vektorje in ustrezne lastne podprostore za W.

4. Določi lastne vrednosti, lastne vektorje in lastne vrednosti za matrike:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   e) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -3 & -4 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

5. Naj bo λ lastna vrednost operatorja A in x ustrezni lastni vektor. Naj bo $B = A + sI$, $C = tA$. Izračunaj Bx, Cx. Kakšen sklep lahko narediš?

6. Naj bo $A : X \to X$ bijektiven linearen operator, λ lastna vrednost in x ustrezni lastni vektor za A. Izračunaj $A^{-1}x$.

* 7. Določi lastne vrednosti in lastne vektorje za

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

* 8. Naj bosta $A, B : X \to X$ linearna operatorja. Dokaži: če je 0 lastna vrednost za AB, je 0 lastna vrednost za BA.