12. INVERZ IN CRAMERJEVO PRAVILO

Definicija: Kvadratna matrika A je SINGULARNA, če je $\det A = 0$, in NESINGULARNA, če je $\det A \neq 0$.

Definicija: Kvadratna matrika A je OBRNLJIVA, če obstaja matrika B, da je

$$\boxed{AB = BA = I}.$$

Matriko B, ki je enolično določena, imenujemo INVERZNA MATRIKA ali kratko INVERZ matrike A in označimo z A^{-1}.

Torej:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}.$$

Dokaz enoličnosti: Denimo, da je $AG = I$. Pomnožimo na levi z B: $B(AG) = BI = B$. Toda $BAG = (BA)G = IG = G$. Torej je $G = B$ in inverz enolično določen.

PRIMER: Naj bo $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Potem je $N^2 = 0$, zato N ni obrnljiva. Če bi namreč obstajal N^{-1}, bi enakost $N^2 = 0$ pomnožili z N^{-1} in dobili $N = 0$, kar ni res.

LASTNOSTI INVERZA:

Če sta A, B obrnljivi $n \times n$ matriki in $t \neq 0$, je

$$\boxed{\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A \\ (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T \\ (tA)^{-1} &= t^{-1}A^{-1} \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \end{aligned}}$$

Prva lastnost je očitna. Če enakost $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ transponiramo, dobimo:

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I^T = I,$$

kar dokazuje drugo vrstico. Seveda je

$$(tA)(t^{-1}A^{-1}) = (t^{-1}A^{-1})(tA) = I$$

kar dokaže tretjo vrstico. In $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}IB = I$, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AIA^{-1} = I$.

Če ima matrika A ničelno vrstico, ima AG ničelno vrstico za vsako matriko G, torej A ni obrnljiva. Če ima A ničeln stolpec, ima GA ničeln stolpec, zato A ni obrnljiva. Če je $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, je D obrnljiva natanko tedaj, ko so vsi d_i neničelni. V tem primeru je $D^{-1} = \mathrm{diag}(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1})$.

Če je A obrnljiva, je nesingularna. Iz $AA^{-1} = I$ namreč sledi $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1$, torej je $\det A \neq 0$. Če je A singularna, torej ni obrnljiva. Velja še več:

<u>Izrek</u>: <u>Kvadratna matrika A je obrnljiva natanko tedaj, ko je nesingularna, t.j. ko velja $\det A \neq 0$.</u>

Dokaz je konstruktiven (vendar je konstrukcija za $n \geq 3$ nepraktična). Naj bo

$k_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i|j))$

kofaktor (poddeterminanta) elementa a_{ij}. <u>PRIREJENKA</u> B_A matrike A je matrika

$$B_A = \begin{bmatrix} k_{11}, & k_{21}, & \ldots, & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \ldots & k_{n2} \\ & & & \\ k_{1n}, & k_{2n}, & \ldots, & k_{nn} \end{bmatrix}$$

(V A nadomestimo a_{ij} s k_{ij} za vse i,j in dobljeno transponiramo).

Potem trdimo:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} B_A .}$$

Pa zmnožimo AB_A:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & \dots, & r_{j1}, & \dots & r_{n1} \\ & & \vdots & & \\ r_{1n}, & \dots & r_{jn} & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Na mestu (i,j) v produktu dobimo

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il} r_{jl} .$$

Če je $i = j$, je ta vsota po Laplaceu enaka $\det A$. Če je $i \neq j$, je to po Laplaceu enako determinanti matrike, dobljene iz A tako, da j-to vrstico nadomestimo z i-to. Ker ima ta matrika dve vrstici enaki, je njena determinanta 0. Torej je

$$AB_A = \begin{bmatrix} \det A & & 0 \\ & \det A & \\ 0 & & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I .$$

Enako vidimo: $B_A A = (\det A) I$. □

PRIMER: Naj bo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ in $\det A = ad - bc \neq 0$.

Potem je $r_{11} = d$, $r_{12} = -c$, $r_{21} = -b$, $r_{22} = a$. Zato je

$$B_A = \begin{bmatrix} d, & -b \\ -c, & a \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d, & -b \\ -c, & a \end{bmatrix} .$$

Primer: Določimo $X \in M_2$, da je $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

R. $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} .$$

Primer: Določimo $X \in M_2$, da je

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matrika na levi je singularna. Zato ni obrnljiva. Pišimo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, pa dobimo sistem enačb

$$\begin{array}{l|l} 2a - 3c = 1 & 2b - 3d = -3 \\ -4a + 6c = -2 & -4b + 6d = 6 \end{array}$$

Levi enačbi sta ekvivalentni. Zato je $a = \frac{1+3c}{2}$.

Tudi desni enačbi sta ekvivalentni. Torej je

$$b = \frac{3d-3}{2}$$

in

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1+3c}{2} & \frac{3d-3}{2} \\ c & d \end{bmatrix},$$

kjer sta c, d poljubna.

Inverzov večjih matrik nam navadno ni potrebno računati.
Za majhne obrnljive matrike pa imamo naslednji algoritem.
Zapišemo ob $A \in M_n$ še identično matriko I_n:

$$\left[A \;\middle|\; I_n \right]$$

Z elementarnimi vrstičnimi transformacijami v levem delu naredimo vrstično kanonično formo, ki je identična matrika.
V desnem delu nam pri tem nastane A^{-1}:

$$\left[I_n \;\middle|\; A^{-1} \right].$$

Dokaz je sestavljen iz treh opažanj.

1. Ker je A obrnljiva, je vrstična kanonična forma za A identična matrika.

Res, prvi stolpec za A je neničeln. Torej lahko z elementarnimi vrstičnimi transformacijami dosežemo obliko:

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

Če $\det A$ razvijemo po prvem stolpcu, je $0 \neq \det A = \det B$.
Torej ima B prav tako neničeln prvi stolpec in lahko pretvorimo v

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & C \end{array}\right]$$ itd.

Posledica:

2. Če razširjeno matriko sistema $Ax = b$ spravimo v vrstično kanonično formo, dobimo na desni rešitev sistema, se pravi $A^{-1} b$.

3. Če je $B \in M_{n,r}$ in na $[A \mid B]$ izvedemo elementarne vrstične operacije, tako da namesto A dobimo I_n, smo obenem rešili sisteme:

$$Ax = \text{prvi stolpec matrike } B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix},$$

$$- \; - \; - \; -$$

$$Ax = r\text{-ti stolpec matrike } B = \begin{bmatrix} b_{1r} \\ \vdots \\ b_{nr} \end{bmatrix}.$$

Zato smo desno od črtkane črte dobili matriko s stolpci:

$$A^{-1}\begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \ldots, A^{-1}\begin{bmatrix} b_{1r} \\ \vdots \\ b_{nr} \end{bmatrix},$$ se pravi matriko $A^{-1}B$.

Če je $B = I_n$, je seveda na desni $A^{-1}I_n = A^{-1}$.

Primer: Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right].$$

Torej je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Lahko preverimo: $AA^{-1} = I_2$.

Množico vseh obrnljivih $n \times n$ matrik označimo z $GL(n)$ in imenujemo SPLOŠNA LINEARNA GRUPA (v M_n).

Za nas je pomembno predvsem naslednje:

1) $I_n \in GL(n)$

2) Če je $A \in GL(n)$, je $A^{-1} \in GL(n)$.

3) Če sta $A, B \in GL(n)$, je $AB \in GL(n)$.

Pravimo, da je $GL(n)$ ZAPRTA za množenje in za inverze.

Kot že rečeno, je

$$GL(n) = \{A \in M_n ; \det A \neq 0\}.$$

Trditev: Če sta $A, B \in M_n$ in je $AB = I$, sta $A, B \in GL(n)$ in $B = A^{-1}$.

Dokaz. Ker je $\det(AB) = (\det A)(\det B) = \det I = 1$, sta A, B nesingularni. Preostanek smo že dokazali.

CRAMERJEVO PRAVILO

Imejmo sistem n linearnih enačb z n neznankami:

$$Ax = b.$$

Naj bo A obrnljiva. Pomnožimo enakost na levi z A^{-1}:

$$x = A^{-1} b.$$

Sistem ima potem natanko eno rešitev. Upoštevajmo, da je

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B_A$, kjer je B_A prirejenka. Torej je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} b = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{n1} \\ - & - & - \\ z_{1i} & \cdots & z_{ni} \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

in torej
$$x_i = \frac{1}{\det A} \left(z_{1i} b_1 + z_{2i} b_2 + \dots + z_{ni} b_n \right) =$$
$$= \frac{1}{\det A} \left(b_1 z_{1i} + b_2 z_{2i} + \dots + b_n z_{ni} \right).$$

V oklepaju imamo Laplaceov razvoj determinante matrike A_i. Tu je A_i dobljena iz A tako, da i-ti stolpec nadomestimo s stolpcem desnih strani:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1,i-1}, b_1, a_{1,i+1}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, \dots, a_{2,i-1}, b_2, a_{2,i+1}, \dots, a_{2n} \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{n1}, \dots, a_{n,i-1}, b_n, a_{n,i+1}, \dots, a_{nn} \end{bmatrix}$$

Torej je

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}} \quad \text{za } i = 1, \dots, n.$$

To je CRAMERJEVO PRAVILO. Praktično ga uporabljamo le za $n = 2$, sicer ima teoretično vrednost.

Primer: Imamo sistem

$$5x - 3y = 4$$
$$2x + 7y = 6.$$

Potem je determinanta sistema enaka $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 41$ in

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}}{41} = \frac{46}{41}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{41} = \frac{22}{41}.$$

NALOGE

1. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Določi A^2 in A^{-1}.

2. Naj bo I identična matrika, λ neničeln skalar. Določi $(\lambda I)^{-1}$.

3. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Določi vsa števila λ, za katera je $A + \lambda I$ obrnljiva.

4. Naj bo $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Določi vsa števila λ, za katere je $B - \lambda I$ singularna matrika.

5. Naj bo $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix}$. Določi R^{-1} in R^2.

6. Če je $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, določi A^{-1}.

7. Izračunaj inverz matrike $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Določi kvadratno matriko X, ki zadošča enačbi

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Določi kvadratno matriko X, za katero velja

$$X \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

10. Ali obstaja matrika $X \in M_2$, da je

$$\begin{bmatrix} 4, & -2 \\ 6, & -3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad ?$$

11. Če je $A \in GL(n)$ in $t \neq 0$, ali je $tA \in GL(n)$?

12. Označimo $SL(n) = \{A \in M_n ; \det A = 1\}$.

Ali velja:

a) Če je $A \in SL(n)$, je $A^{-1} \in SL(n)$?

b) Če sta $A, B \in SL(n)$, je $AB \in SL(n)$?

(Množica $SL(n)$ je <u>specialna linearna grupa</u>.)

Naj bo $R = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix}$ in $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

c) Katere od matrik: R, A, A^T, A^{-1} so v $SL(n)$?

d) Ali so R^7, A^{20}, ARA^T v $SL(n)$?