3. LINEARNA NEODVISNOST, BAZA, DIMENZIJA.

LINEARNA ODVISNOST

Def. Množica M v vektorskem prostoru X je LINEARNO ODVISNA, če lahko en vektor iz M izrazimo kot linearno kombinacijo nekih drugih vektorjev iz M.

Od tod sledi:

Množica $M \subseteq X$ je linearno odvisna, če obstaja netrivialna linearna kombinacija vektorjev iz M, ki je enaka 0.

Izrek: Vektorji $x_1, \dots, x_n$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko iz $t_1 x_1 + \dots + t_n x_n = 0$ sledi $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$.

Ekvivalentno:

Vektorji $x_1, \dots, x_n$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko iz $t_1 x_1 + \dots + t_n x_n = s_1 x_1 + \dots + s_n x_n$ sledi $t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n$.

PRIMERI:

Vsaka množica, ki vsebuje linearno odvisno množico, je linearno odvisna.

Množica $\{x\}$ (z enim samim elementom x) je linearno odvisna natanko tedaj, ko je $x = 0$.

Podmnožica linearno neodvisne množice je linearno neodvisna.

Denimo, da imamo v $\mathbb{R}^n$ neničelne vektorje z lastnostjo: Če jih zložimo kot vrstice matrike, je pivot vsake vrstice strogo desno od pivota vrstice nad njo. Potem so ti vektorji linearno neodvisni.

Gornja situacija je zelo podobna stopničasti obliki, le da pivoti niso nujno enaki 1.

Pomembno je, da razumemo dokaz te trditve. Denimo, da imamo vektorje:

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$
$$(0, a_{22}, \dots, a_{2n})$$
$$(0, 0, 0, a_{34}, \dots a_{3n})$$
$$\text{— — — — —},$$

kjer so $a_{11}, a_{22}, a_{34} \dots$ neničelni in je pivot vsake vrstice strogo desno od pivota vrstice nad njim. Če je linearna kombinacija teh vrstic enaka 0:

$$t_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + t_2(0, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \dots = 0,$$

je $(t_1 a_{11}, \dots) = (0, 0, \dots 0)$.

Ker je $a_{11} \neq 0$, je $t_1 = 0$. Torej prvi sumand v gornji vsoti odpade.

Ker je $t_2(0, a_{22}, \dots, a_{2n}) + t_3(0, 0, 0, a_{34}, \dots, a_{3n}) + \dots = 0$, je

$$(0, t_2 a_{22}, \dots) = (0, 0, \dots 0),$$

zato je spet $t_2 = 0$ itd ...

Primera: 1. Vektorji $(2,1,2)$, $(0,3,-5)$, $(0,0,7)$ so linearno neodvisni, zato sestavljajo bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

2. Vektorji $(-1,0,0,4)$, $(0,3,-2,0)$ in $(0,0,4,-10)$ so linearno neodvisni vektorji v $\mathbb{R}^4$.

Def. Množica E v vektorskem prostoru X je BAZA prostora X, če je linearno neodvisna in razpenja X, se pravi Lin (E) = X.

Enakovredno:

Množica $E \subset X$ je baza za X, če lahko vsak vektor $x \in X$ na en in en sam način zapišemo kot linearno kombinacijo elementov iz E.

Baza prostora X je linearno neodvisno ogrodje za X.

Trivialni prostor $\{0\}$ nima baze.

Izrek: Naj bo M ogrodje netrivialnega prostora X. Potem v M obstaja podmnožica, ki je baza za X.

Dokaz bomo naredili za primer, da je M končna množica: $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Dokaz je konstruktiven.

Če je $x_1 = 0$, ga odvržemo in se omejimo na množico $\{x_2, \ldots, x_n\}$. Denimo, da je $x_1 \neq 0$. Potem je to prvi bazni vektor. Če je x_2 večkratnik od x_1, potem x_2 odvržemo. Sicer pa je x_2 drugi bazni vektor ... Splošno odvržemo tiste x_k, ki so linearna kombinacija vektorjev $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Naj bo $\{y_1, \ldots, y_r\} = E$ preostanek. Jasno je, da je $\mathrm{Lin}(E) = \mathrm{Lin}(M) = X$. Če je $\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_r y_r = 0$, pogledamo zadnji λ_i, ki je od 0 različen. Potem je y_i linearna kombinacija od $y_1, \ldots, y_{i-1}$, kar ni mogoče. Torej so vsi λ_i enaki 0.

Primer 1. Vektorji $\vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots 0)$, ... $\vec{e}_n = (0,0,\ldots,0,1)$ sestavljajo <u>STANDARDNO ORTONORMIRANO BAZO</u> prostora $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$). Res: za vsak $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$. Iz $x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n = 0$ sledi $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, torej $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

<u>Primer</u>: Potence $1, x, x^2, \ldots, x^n$ sestavljajo bazo prostora vseh polinomov stopnje $\leq n$. Vsak polinom lahko namreč na en in en sam način zapišemo kot linearno kombinacijo teh potenc.

<u>Posledica</u>: Naj bo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ polinom in p soda funkcija: $p(-x) = p(x)$ za vsak x. Zapišimo

$$p(-x) = a_n(-1)^n x^n + a_{n-1}(-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots + (-1)a_1 x + a_0 = q(x).$$

Ker je $p = q$ in so $1, x, \ldots, x^n$ linearno neodvisni, je

$$a_n = a_n(-1)^n \quad \text{za vsak } n.$$

Če je n lih, je $a_n = -a_n$, zato $2a_n = 0$ in $a_n = 0$.

Sod polinom je torej linearna kombinacija sodih potenc:

$$p(x) = a_0 + a_2x^2 + \ldots + a_{2m}x^{2m} \qquad (m \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Enako vidimo: če je polinom q lih, je linearna kombinacija lihih potenc spremenljivke x:

$$q(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{2m-1} x^{2m-1} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Primer: Naj bo $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x+1$, $p_2(x) = (x+1)^2$.
Pokažimo, da je $\{p_0, p_1, p_2\}$ baza prostora polinomov stopnje največ 2. Vsekakor so ti polinomi linearno neodvisni. (sicer bi bil eden od njih linearna kombinacija preostalih dveh).
Zapišimo: $x = p_1 - p_0$, $x^2 = p_2 - 2x - 1 = p_2 - 2(p_1 - p_0) - p_0 = p_2 - 2p_1 + p_0$. Tako je poljuben polinom stopnje največ 2:

$$ax^2 + bx + c = a(p_2 - 2p_1 + p_0) + b(p_1 - p_0) + cp_0 =$$
$$= ap_2 + (b - 2a)p_1 + (a - b + c)p_0$$

linearna kombinacija polinomov p_0, p_1, p_2.

Denimo: $x^2 + x + 1 = p_2 - p_1 + p_0$,

$$4x^2 - 3x + 2 = 4p_2 - 11p_1 + 9p_0.$$

Denimo, da imamo vektorje $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \vec{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ v $\mathbb{R}^n$.
Zložimo jih skupaj kot vrstice matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix}.$$

Velja:

1. Če na matriki A opravljamo elementarne vrstične transformacije, ne spremenimo linearne ogrinjače vrstic.

2. Če z elementarnimi vrstičnimi transformacijami iz A dobimo stopničasto obliko, neničelne vrstice v tej stopničasti formi sestavljajo linearno neodvisno množico, ki je baza za $\mathrm{Lin}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$.

Dokaz za 1. Če k eni od vrstic prištejem večkratnik druge vrstice, bo linearna ogrinjača dobljenih vrstic vsebovana v linearni ogrinjači originalnih vrstic. Ker pa s transformacijo enake vrste lahko vzpostavimo začetno stanje, velja tudi vsebovanje v drugi smeri. Za preostala dva tipa elementarnih transformacij je stvar očitna.

Tako z Gaussovo eliminacijo v $\mathrm{Lin}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\} = Y$ poiščemo bazo. – Iz ogrodja $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ za Y pridelamo bazo za Y.

Dokazali smo, da je za vsako nesingularno matriko $A \in M_n$ vrstična kanonična forma kar identična matrika. Vrstice identične matrike sestavljajo standardno ortonormirano bazo $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ za $\mathbb{K}^n$, ki je, kot smo pravkar ugotovili, baza za linearno ogrinjačo vrstic matrike A. Torej je linearna ogrinjača vrstic nesingularne matrike A enaka $\mathbb{K}^n$.

PRIMER: Pokažimo, da vektorji $\vec{f}_1=(1,1,0)$, $\vec{f}_2=(1,0,1)$ in $\vec{f}_3=(0,1,1)$ sestavljajo ogrodje prostora $\mathbb{R}^3$. Zapišimo vektor $(5,-1,2)$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ in $\vec{f}_3$.

Rešitev: Dane vektorje zapišimo kot vrstice matrike:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Napravimo Gaussovo eliminacijo in dobimo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tako je $\mathrm{Lin}\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ enaka linearni ogrinjači vektorjev $(1,1,0)$, $(0,1,-1)$ in $(0,0,1)$. Ker so ti vektorji linearno neodvisni, so baza prostora $\mathbb{R}^3$. Torej je njihova linearna ogrinjača enaka $\mathbb{R}^3$.

Zapišimo

$$(5,-1,2) = x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 + z\vec{f}_3 = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1) =$$
$$= (x+y, x+z, y+z)$$

Imamo sistem enačb:

$$\begin{aligned} x+y &= 5 \\ x+z &= -1 \\ y+z &= 2 \end{aligned}$$

Seštejmo vse tri enačbe: $2x+2y+2z=6$ ali $x+y+z=3$. Ker je $x+y=5$, je $5+z=3$ in tako $z=-2$. Ker je $x+z=-1$, je $-1+y=3$ ali $y=4$. Od tod je $x+4=5$ in $x=1$.

Torej je

$$(5,-1,2) = \vec{f}_1 + 4\vec{f}_2 - 2\vec{f}_3 .$$

Izrek: Naj bo X vektorski prostor z bazo $\{e_1, \dots, e_n\}$. Potem v X ne moremo najti več kot n linearno neodvisnih vektorjev.

Dokaz. Naj bodo $\{f_1, \dots, f_m\}$ linearno neodvisni vektorji v X in $m \geq n$. Zapišimo:

$$f_1 = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

Vsaj eno od števil $a_1, \dots, a_n$ je neničelno. Če je potrebno, oštevilčimo $e_1, \dots, e_n$ na novo, da bo $a_1 \neq 0$. Potem je e_1 linearna kombinacija vektorjev $f_1, e_2, \dots, e_n$. Tako je $\text{Lin}\{f_1, e_2, \dots, e_n\} = X$.

Dokaz bo šel z indukcijo. Denimo, da smo že dokazali, da po primernem drugačnem oštevilčenju vektorjev $e_1, \dots, e_n$ velja

$$\text{Lin}\{f_1, \dots, f_r, e_{r+1}, \dots, e_n\} = X.$$

Potem je $f_{r+1} = b_1 f_1 + \dots + b_r f_r + b_{r+1} e_{r+1} + \dots + b_n e_n$.

Vsekakor števila $b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n$ ne morejo biti vsa enaka 0 (ker so $f_1, \dots, f_m$ linearno neodvisni.) Če je potrebno, ponovno oštevilčimo $e_{r+1}, \dots, e_n$, tako da bo $b_{r+1} \neq 0$. Potem je e_{r+1} linearna kombinacija vektorjev $f_1, \dots, f_{r+1}$ in $e_{r+2}, \dots, e_n$. Tako je $\text{Lin}\{f_1, \dots, f_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n\} = X$.

Po indukciji dobimo, da $f_1, \dots, f_n$ razpenjajo X. Če bi bil $m > n$, bi bil $f_{n+1} \in \text{Lin}\{f_1, \dots, f_n\}$. To pa je v protislovju s predpostavko, da so $f_1, \dots, f_m$ linearno neodvisni. Torej je $m = n$.

Posledica: Naj ima vektorski prostor X bazo z n elementi. Potem ima tudi vsaka druga baza za X n elementov. Število n imenujemo RAZSEŽNOST (DIMENZIJA) prostora X, kratko $\dim X$.

$\boxed{\text{Dimenzija je moč baze.}}$ Dogovor: $\boxed{\dim\{0\} = 0.}$

Izrek: Če je $\{f_1, \dots, f_n\}$ maksimalna linearno neodvisna množica prostora X, je to baza za X.

D.: Denimo, da bi obstajal $x \in X$, ki ni linearna kombinacija vektorjev $f_1, \dots, f_n$. Ker je $\{f_1, \dots, f_n, x\}$ linearno odvisna, se mora torej neki f_k izražati kot

$$f_k = \sum_{i \neq k} t_i f_i + s x$$

Vsekakor je $s \neq 0$. (Sicer bi bili $f_1, \dots, f_n$ linearno odvisni).
Toda potem je $x = s^{-1} f_k - \sum_{i \neq k} s^{-1} t_i f_i$, kar je v protislovju z začetno predpostavko. Torej je $\mathrm{Lin}\{f_1, \dots, f_n\} = X$.

Izrek: Naj bo X vektorski prostor z razsežnostjo n in Y linearen podprostor v X. Potem je $\dim Y \leq n$. Če je $\dim Y = n$, je $Y = X$.

Dok. Za $n = 0$ je to jasno. Privzemimo torej, da je $n \geq 1$.
Naj bo $\{f_1, \dots, f_m\}$ baza za Y. Ker je to linearno neodvisna množica v X, je $m \leq n$.

Če je $m = n$, je $\{f_1, \dots, f_n\}$ maksimalna linearno neodvisna množica v X, torej baza za X. Zato je $Y = X$.

Brez dokaza povejmo še

Izrek: Vsak netrivialen vektorski prostor X ima bazo. Vsako linearno neodvisno podmnožico v X lahko dopolnimo do baze za X.

PRIMER: Ali so vektorji $\vec{a} = (1,-3,2,0)$, $\vec{b} = (2,-4,-1,-1)$ in $\vec{c} = (1,-5,7,1)$ linearno neodvisni?

R. Sestavimo matriko, katere vrstice so dani vektorji:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Naredimo Gaussov eliminacijski postopek:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tako je $Y = \text{Lin}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ enaka linearni ogrinjači vektorjev $(1,-3,2,0)$ in $(0,2,-5,-1)$, ki sta linearno neodvisna. Ta dva vektorja sta baza za Y in tako je $\dim Y = 2$. Torej so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno odvisni. Če bi bili namreč linearno neodvisni, bi razpenjali tirazsežen prostor.

Enako utemeljimo naslednji ALGORITEM:

Vzemimo vektorje $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \in \mathbb{R}^n$. Zložimo jih skupaj kot vrstice matrike A:

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix}.$$

Z elementarnimi vrstičnimi transformacijami predelamo A v matriko B, ki ima stopničasto obliko.

I. Če ima B vse vrstice neničelne, so vektorji $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ linearno neodvisni.

II. Če ima B le $k < m$ neničelnih vrstic, so vektorji $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ linearno odvisni. Množica $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ je baza za $Y = \text{Lin}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ in $\dim Y = k$.

Če to kombiniramo s prejšnjimi rezultati, vidimo:

Če je A nesingularna $n\times n$ matrika, so njene vrstice linearno neodvisne in sestavljajo bazo za K^n.

Naj bo $E_{ij} \in M_{mn} = K^{m\times n}$ matrika velikosti $m\times n$, ki ima na križišču i-te vrstice in j-tega stolpca enko, vsi drugi elementi te matrike pa so 0. Matrike E_{ij} $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)$ imenujemo matrične enote. Sestavljajo bazo prostora M_{mn} vseh $m\times n$ matrik. Vsako $m\times n$ matriko A lahko namreč na en in en sam način zapišemo kot

$$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}\,.$$

Torej je $\dim(M_{mn}) = mn$.

Primer: V prostoru M_2 vseh 2×2 matrik nam

$E_{11} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ in $E_{22} = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

sestavljajo bazo. Za vsako matriko velikosti 2×2 velja

$$A = \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$$

in ta zapis je enoličen. Torej je $\dim(M_2) = 4$.

NALOGE:

1. Naj bo $\vec{a} = (-1,2)$ in $\vec{b} = (2,-3)$. Izrazi kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektor:
   a) $\vec{i}$; b) $\vec{j}$; c) $(2,-1)$.

2. Naj bo $p_0 = 1$, $p_1 = x-3$, $p_2 = (x-3)^2$. Izrazi kot linearno kombinacijo polinomov p_0, p_1, p_2:
   a) x ; b) x^2 ; c) $(2x+1)^2$; d) $x^3 - x$.
   e) Ali je $\{p_0, p_1, p_2\}$ ogrodje prostora $\mathcal{P}_2$ polinomov stopnje največ 2?
   f) Ali so p_0, p_1, p_2 linearno neodvisni?
   g) Ali je $\{p_0, p_1, p_2\}$ baza za $\mathcal{P}_2$?
   Vse odgovore utemelji.

3. Naj bo $\vec{a} = (100, \frac{1}{101})$ in $\vec{b} = (100, \frac{1}{100})$. Izrazi kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektor:
   a) $\vec{i}$; b) $\vec{j}$.

4. Naj bo $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; z = 3x+2y\}$.
   a) Kaj je množica Y?
   b) Določi presečišče množice Y z ravnino xy.
   c) Določi tako bazo $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ za Y, tako da bosta $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ enotska vektorja in $\langle \vec{g}_1, \vec{i} \rangle = 0 = \langle \vec{g}_2, \vec{j} \rangle$.

5. Imamo vektorje $\vec{a} = (0,-2,0,1)$, $\vec{b} = (2,1,1,0)$, $\vec{c} = (1,0,-1,0)$.
   a) Ali so ti vektorji linearno neodvisni?
   b) Določi $\dim(\mathrm{Lin}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\})$.

6. Naj bo T_3 prostor vseh zgornjih trikotnih 3×3 matrik.
Določi kako bazo za T_3 in $\dim T_3$.

7. Če je D_n prostor vseh $n\times n$ diagonalnih matrik, določi kako bazo za D_n in $\dim D_n$.

8. a) Ali so vektorji: $(3,2,2,2,2)$, $(9,1,4,-5,1)$, $(2,2,3,4,5)$, $(7,1,6,-1,7)$ in $(2,3,2,5,3)$ linearno neodvisni?

b) Določi razsežnost podprostora, napetega na teh pet vektorjev.

* 9. Naj bosta $\vec{r}=\vec{r}_0+s\vec{a}$ $(s\in\mathbb{R})$ in $\vec{r}=\vec{r}_1+t\vec{b}$ $(t\in\mathbb{R})$ enačbi premic v $\mathbb{R}^n$. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna. Določi potrebni in zadostni pogoj za to, da imata premici skupno točko.