4. LINEARNE PRESLIKAVE

Def. Naj bosta X, Y vektorska prostora nad istim poljem $\mathbb{K}$ skalarjev. Preslikava $A : X \to Y$ je LINEARNA, če A ohranja vsoto in produkt s skalarjem:

$$\boxed{\begin{array}{c} A(x+y) = Ax + Ay, \\ A(\lambda x) = \lambda A x \end{array}} \qquad (x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}).$$

Pazimo na pisavo: namesto $A(x)$ pišemo kar Ax. Namesto obeh pogojev bi lahko zapisali le enega:

$$\boxed{A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y}$$

za poljubna vektorja x, y in za poljubna skalarja α, β.

Linearni preslikavi $f : X \to \mathbb{K}$ (v skalarje) rečemo LINEARNI FUNKCIONAL. Tu pišemo $f(x)$ in ne fx. $(x \in X)$.

Primer: Naj bo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ baza za $\mathbb{R}^3$. Preslikava $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$P(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

je VZPOREDNA PROJEKCIJA na ravnino $\mathrm{Lin}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vzdolž vektorja $\vec{e}_3$ (vzporedno vektorju $\vec{e}_3$). Ta projekcija je linearna.
Če je $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ in $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, je
$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\vec{e}_1 + (a_2+b_2)\vec{e}_2 + (a_3+b_3)\vec{e}_3$ in torej $P(\vec{a}+\vec{b}) =$
$= (a_1+b_1)\vec{e}_1 + (a_2+b_2)\vec{e}_2 = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = P\vec{a} + P\vec{b}$.
Ker je $\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2 + \lambda a_3\vec{e}_3$, je $P(\lambda\vec{a}) = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2 =$
$= \lambda(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) = \lambda P\vec{a}$.

Enako vidimo, da je preslikava $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definirana z

$$Q(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) = a_3\vec{e}_3$$

linearna. To je vzporedna projekcija na Lin $\{\vec{e}_3\}$ vzdolž Lin $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Posebni primeri:

Preslikava $P_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definirana s

$$P_1(x, y, z) = (x, 0, 0)$$

je linearen funkcional (pravokotna projekcija na os x).

Preslikava $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $S(x, y, z) = (0, y, z)$ je linearna. To je pravokotna projekcija na ravnino yz.

Preslikava $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definirana z

$$Z(x, y, z) = (x, y, -z)$$

je linearna. To je zrcaljenje čez ravnino xy.

Preslikava $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, določena z $V(x, y) = (-y, x)$ je linearna. (Vrtenje okrog 0 za $-90°$.)

Naj bo $\mathcal{P}$ prostor vseh polinomov. Za $p = a_n x^n + \dots + a_0$ naj bo $Dp = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$. Potem je $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ linearen operator (odvajanje).

Linearni preslikavi iz prostora X v isti prostor X rečemo ENDOMORFIZEM PROSTORA X. Pojem LINEARNI OPERATOR NA X ali LINEARNA TRANSFORMACIJA NA X prav tako pomeni linearno preslikavo iz X v X. (Vendar nekatere knjige govorijo tudi o linearnih operatorjih (transformacijah) med različnimi prostori.)

Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{K}^n$. Preslikava $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, definirana s

$$f(\vec{z}) = \langle \vec{z}, \vec{a} \rangle$$

je linearni funkcional. Preslikava $g: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, definirana z

$$g(\vec{z}) = \langle \vec{a}, \vec{z} \rangle = \overline{f(\vec{z})}$$

pa za $\vec{a} \neq 0$ ni linearna. Namreč:

$$g(\lambda \vec{z}) = \bar{\lambda}\, g(\vec{z}). \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

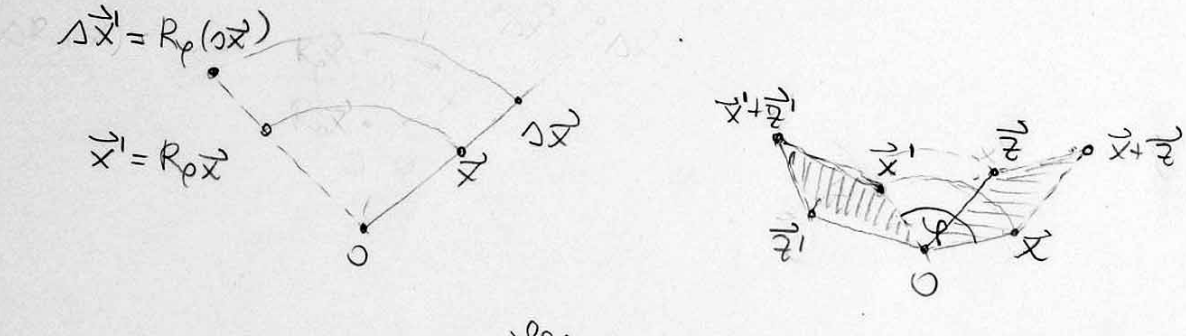
NIČELNA PRESLIKAVA $0: X \to Y$, $0x = 0$ za vsak $x \in X$, je linearna. IDENTIČNA PRESLIKAVA $I: X \to X$, $Ix = x$ za vsak x, je linearna.

Naj bo $\vec{e}$ enotski vektor v $\mathbb{K}^n$. Preslikava $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, definirana z

$$A\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{e} \rangle \vec{e}$$

je linearna. To je PRAVOKOTNA PROJEKCIJA VEKTORJA $\vec{x}$ NA $\mathrm{Lin}\{\vec{e}\}$ (na premico skozi 0, ki vsebuje $\vec{e}$).

Naj bo $R_\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vrtenje okrog 0 za kot φ. Potem je R_φ linearna preslikava (slika 1).



Slika 1:

Na tej sliki vidimo, da je $R_\varphi(\lambda \vec{x}) = \lambda R_\varphi \vec{x}$. Ker levi osenčeni paralelogram dobimo iz desnega z vrtenjem za kot φ okrog 0, je $\vec{x}' + \vec{z}' = R_\varphi \vec{x} + R_\varphi \vec{z} = R_\varphi(\vec{x} + \vec{z})$.

Od tod sledi:

Naj bo p premica skozi O v $\mathbb{R}^3$ in V_φ vrtenje okrog p za kot φ. Potem je V_φ linearna preslikava. Za $\vec{x} \in p$ je $V_\varphi \vec{x} = \vec{x}$. Če φ ni večkratnik od 2π, so točke na p edine točke, ki jih V_φ ohranja.

(Če namreč postavimo koordinatni sistem tako, da je p os z, je $V_\varphi(x, y, z) = (x', y', z)$ in $(x', y') = R_\varphi(x, y)$.)

Linearna preslikava preslika O v O.

Če je $A : X \to Y$ linearna, je

$$\boxed{A\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i (A x_i).}$$

Dokaz prve trditve: $A(O) = A(0 \cdot x) = 0 Ax = O \quad (x \in X)$.

Druga trditev je res za $n = 2$. Naprej gre z indukcijo. □

Primer: 1. Če je $\vec{a}$ neničeln vektor v $\mathbb{R}^3$, vzporedni premik T za vektor $\vec{a}$ NI LINEAREN. Namreč: $T\vec{x} = \vec{x} + \vec{a}$, zato je $TO = \vec{a} \neq O$.

2. Preslikava $\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|$ iz $\mathbb{K}^n$ v $\mathbb{K}$ ni linearna. Namreč:

$$\|(-1)\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \neq (-1) \cdot \|\vec{x}\| \text{ za } \vec{x} \neq O.$$

3. Preslikava $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ iz $\mathbb{K}^n$ v $\mathbb{R}$ ni linearna:

Če je $h(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, je $h(2\vec{x}) = 4\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 4h(\vec{x}) \neq$
$\neq 2h(\vec{x})$ za $\vec{x} \neq O$.

4. Če je $f : X \to \mathbb{K}$ linearen funkcional in $a \in Y$ poljuben vektor, je preslikava $x \mapsto f(x)a$ iz X v Y linearna. (Tu sta X, Y vektorska prostora nad poljem $\mathbb{K}$.)

POZOR! Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s $f(x) = kx + n$, je linearna le v primeru $n = 0$ (saj je $f(0) = n$). Zato nekateri funkciji $x \mapsto kx+n$ raje rečejo AFINA FUNKCIJA.

NALOGE

1. Naj bo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1$.
   a) Ali je f linearen funkcional?
   b) Določi $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ tako, da je $f(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$ za vse $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

2. Naj bo $H: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definirana s $H\vec{x} = 3\vec{x}$.
   a) Ali je H linearna?
   b) Kakšen geometrijski pomen ima H? Kako jo imenujemo?

3. Naj bo $T: M_n \to M_n$ definirana s $TA = A^T$. Ali je T linearna?

4. Naj bo $A \in M_{mn}$ in $B \in M_{np}$. Ali je preslikava $A \mapsto AB$ iz M_{mn} v M_{mp} linearna?

5. Ali je $\det: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linearna preslikava? Utemelji.

6. Naj bo P prostor vseh polinomov in $J: P \to P$ definirana s
$$J(p)(x) = \int_0^x p(t)\,dt.$$
   a) Določi $J(p)$, če je $p(x) = ax^2 + bx + c$.
   b) Ali je J linearen operator?

7. Naj bo $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ogrodje prostora X in $T: X \xrightarrow{na} Y$ surjektivna linearna preslikava. Ali je $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ ogrodje za Y? Utemelji odgovor.

* 8. Naj bo $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearno neodvisna množica v X in $T: X \to Y$ injektivna linearna preslikava. Ali je $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ linearno neodvisna množica?

9. Naj bo $\mathcal{P}$ prostor vseh polinomov in $M: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definirana z $(Mp)(x) = xp(x)$. Ali je M linearen operator?

10. Naj bo $\mathcal{P}$ prostor vseh polinomov in $f: \mathcal{P} \to \mathbb{K}$ definirana z $f(p) = p(3)$. Ali je f linearen funkcional?

Naj bo $g: \mathcal{P} \to \mathbb{K}$ definirana z $g(p) = p'(2)$. Ali je g linearen funkcional?

* 11. Naj bo $\mathcal{P}$ prostor vseh polinomov in $A: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definirana z $(A(p))(x) = p(-x)$. a) Ali je A linearen operator?

12. Naj bo $B: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definirana z $(B(p))(x) = p(x^2)$.

b) Če je $p(x) = x^2 - 3x$, določi $(B(p))(x)$ in $(A(p))(x)$.

c) Ali je B linearen operator?