9. MATRIKE

Množico števil, razporejeno v pravokotno tabelo z m vrsticami in n stolpci imenujemo MATRIKA velikosti $m \times n$ ali $m \times n$ matrika. Zaradi preglednosti matriko obdamo z oklepajem:

$$\begin{bmatrix} 1, & 2 \\ -1, & 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$$

Uporabljali bomo predvsem oglati oklepaj. Vsaka $m \times n$ matrika A ima torej obliko:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(Prvi indeks pomeni vrstico, drugi stolpec.)

Množico vseh matrik velikosti $m \times n$ označimo z M_{mn} ali z $\mathbb{R}^{m \times n}$, če so v njej realna števila. Posamezna števila v tabeli so ELEMENTI matrike. Dogovorjeno, da je število a_{ij} (i,j)-ti element matrike, torej element, ki leži v i-ti vrstici in j-tem stolpcu.

Če je število vrstic enako številu stolpcev, je matrika KVADRATNA. Če ima matrika eno samo vrstico, govorimo kar o vrstici. Prav tako je matrika z enim samim stolpcem kar stolpec. Vektor v R^3 lahko zapišemo kot 1×3 matriko (vrstico) ali kot 3×1 matriko (stolpec).

RAČUNANJE Z MATRIKAMI

Matriko A pomnožimo s številom t tako, da vsak element v A pomnožimo s t. Če je torej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ je } tA = \begin{bmatrix} ta_{11}, & ta_{12}, & \ldots, & ta_{1n} \\ ta_{21}, & ta_{22}, & \ldots, & ta_{2n} \\ - & - & - & - \\ ta_{m1}, & ta_{m2}, & \ldots, & ta_{mn} \end{bmatrix} = At.$$

Označimo $-A = (-1)A$. Očitno velja:

$$s(tA) = (st)A$$
$$1A = A.$$

Matriko, ki ima vse elemente 0, imenujemo NIČELNA MATRIKA in označimo z 0 ali z $0_{m,n}$, če hočemo povedati, koliko vrstic in stolpcev ima. Očitno je

$$0A = 0_{m,n}$$

(Na levi 0 označuje število 0, na desni 0 označuje matriko 0.)

$$0_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seštevamo le matrike enake velikosti. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{m1}, & \ldots, & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} b_{11}, & \ldots, & b_{1n} \\ b_{m1}, & \ldots, & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Vsoto $A+B$ dobimo tako, da seštejemo istoležne elemente:

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}, & a_{12}+b_{12}, & \ldots, & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21}, & a_{22}+b_{22}, & \ldots, & a_{2n}+b_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1}+b_{m1}, & a_{m2}+b_{m2}, & \ldots, & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Kratko $C = A+B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ za $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

PRIMER: Če je $A = \begin{bmatrix} 0, & -1 \\ 2, & 5 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, je

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 0, & -2 \\ 4, & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21, & 0 \\ 12, & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21, & -2 \\ 16, & 4 \end{bmatrix}.$$

Vemo, da je

$$A+B = B+A$$
$$(A+B)+D = A+(B+D)$$
$$A+0 = A$$
$$A+(-A) = 0 \qquad (s, t \text{ skalarja})$$
$$(s+t)A = (s+t)A$$
$$s(A+B) = sA+sB$$

Razliko $A-B$ definiramo z $A-B = A+(-B)$. Seveda je
$$(A-B)+B = A.$$

Pri seštevanju matrike zadoščajo vsem navadnim računskim zakonom. Matrike velikosti 1×1 se obnašajo kot navadna števila in jih imamo kar lahko za števila.

Matrike velikosti 3×1 ali 1×3 se obnašajo kot vektorji v $\mathbb{R}^3$.

Nenavadno pa je definirano množenje matrik. Zakaj tako, bomo zvedeli kasneje. Najprej definiramo produkt matrike velikosti $1\times n$ (vrstice z n elementi) in matrike velikosti $n\times 1$ (stolpca z n elementi). Produkt je matrika velikosti 1×1 (število):

$$[a_1, \dots, a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n ,$$

ki mu rečemo <u>SKALARNI PRODUKT</u> vrstice $[a_1, \dots, a_n]$ in stolpca $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Naj bo zdaj A $m\times n$ matrika, B pa $n\times p$ matrika. Produkt $C = AB$ je $m\times p$ matrika, katere elementi c_{ij} so dani s

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

Torej je <u>c_{ij} skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B</u>.

Matriki lahko zmnožimo le, če ima <u>prva toliko stolpcev kot druga vrstic</u>.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ - & - & - & - \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^{n} a_{1r} b_{r1}, & \sum_{r=1}^{n} a_{1r} b_{r2}, & \dots, & \sum_{r=1}^{n} a_{1r} b_{rp} \\ \sum_{r=1}^{n} a_{2r} b_{r1}, & \sum_{r=1}^{n} a_{2r} b_{r2}, & \dots, & \sum_{r=1}^{n} a_{2r} b_{rp} \\ - & - & - & - \\ \sum_{r=1}^{n} a_{mr} b_{r1}, & \sum_{r=1}^{n} a_{mr} b_{r2}, & \dots, & \sum_{r=1}^{n} a_{mr} b_{rp} \end{bmatrix}$$

PRIMER:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0, & -1, & 3 \\ 1, & 0, & -2 \\ 0, & -1, & 1 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 0, & -1, & -1 \\ 1, & 1, & -3 \end{bmatrix}$$

Produkt BA ne obstaja!

PRIMER:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vidimo: $AB \neq BA$. Čeprav sta $A, B \neq O$, je $BA = O$!

Komutativni zakon za produkt torej <u>ne velja</u>.

<u>Primer:</u> Kmet redi piščance (PI), purane (PU) in gosi (G). Za prehrano uporablja krmila K_1, K_2 in K_3. Potrebne količine na žival (v kg) so v naslednji tabeli:

	PI	PU	G
K_1	0,5	2	1,8
K_2	3	21	18
K_3	0,2	1,5	1,4

Koliko posameznih krmil potrebuje za vzrejo 3000 piščancev, 1000 puranov in 200 gosi?

$$K_1 = 0{,}5\,kg \cdot 3000 + 2\,kg \cdot 1000 + 1{,}8\,kg \cdot 200 = 3860\ kg.$$

$$K_2 = 3\,kg \cdot 3000 + 21\,kg \cdot 1000 + 18\,kg \cdot 200 = 33600\ kg.$$

$$K_3 = 0{,}2\,kg \cdot 3000 + 1{,}5\,kg \cdot 1000 + 1{,}4\,kg \cdot 200 = 2380\ kg.$$

Kratko je v kilogramih:

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 2 & 1{,}8 \\ 3 & 20 & 18 \\ 0{,}2 & 1{,}5 & 1{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3000 \\ 1000 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

Za produkt matrik vseeno velja precej drugih znanih pravil;

$$t(AB) = (tA)B = A(tB)$$

$$\left.\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \\ (A+F)C &= AC + FC \end{aligned}\right\} \text{ distributivnost}$$

(Tu sta A, F $m \times n$ matriki, B in C pa $n \times p$ matriki.)

Denimo, da obstaja $(AB)C$. Dokazali bomo (kasneje)

$$(AB)C = A(BC).$$

Produkt matrik je torej asociativen.

PRIMER: Naj bo $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix}$. Potem je

$$R_\alpha R_\beta = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta, & -\sin\beta \\ \sin\beta, & \cos\beta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta), & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta), & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

Torej je $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta} = R_\beta R_\alpha$. Matrike R_α med sabo komutirajo.

Dobro si je zapomniti še tole. Denimo, da obstaja produkt AB. Potem je

> j-ti stolpec matrike AB enak produktu A krat (j-ti stolpec matrike B).

In:

> i-ta vrstica matrike AB je enaka produktu (i-ta vrstica matrike A) krat B.

Če je recimo i-ta vrstica matrike A ničelna (sestavljena iz samih ničel), je ničelna tudi i-ta vrstica matrike AB. Če je j-ti stolpec matrike B ničeln, je tudi j-ti stolpec produkta AB ničeln.

TRANSPONIRANA MATRIKA

Vsaki matriki A lahko priredimo TRANSPONIRANO MATRIKO A^T. Če ima A velikost $m \times n$, ima A^T velikost $n \times m$. Če je a_{ij}^T (i,j)-ti element v A^T, je

$$\boxed{a_{ij}^T = a_{ji}.}$$

Tako je k-ta vrstica matrike A enaka k-temu stolpcu matrike A^T. Če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ je } A^T = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1} \\ a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vsekakor je

$$(A^T)^T = A.$$

Če sta A, B enake velikosti in je t skalar, je

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(tA)^T = t A^T.$$

Če obstaja AB, je

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Res: naj bo $C = AB$. Potem je $c_{ij}^T = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = $
$= \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^T a_{kj}^T$.

Primeri: $[a_1, a_2, a_3]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

$$[a_1, a_2, a_3] \cdot [b_1, b_2, b_3]^T = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2, -3 \\ 4, 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2, 4 \\ -3, 5 \end{bmatrix}.$$

KVADRATNE MATRIKE

Množico $M_{n,n}$ vseh $n\times n$ matrik označimo z M_n. Če so elementi $n\times n$ matrike realna števila, je ta matrika v $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n\times n}$. Če so elementi $n\times n$ matrike kompleksna števila, je ta matrika v $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n\times n}$.

(Glavna) DIAGONALA kvadratne matrike je tista, ki se spušča od leve proti desni. Kvadratna matrika je DIAGONALNA, če so vsi izvendiagonalni elementi 0, se pravi, da je $a_{ij} = 0$ za $i\neq j$.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11}, 0, \dots, 0 \\ 0, a_{22}, 0, \dots 0 \\ \dots \\ 0, 0, \dots 0, a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & \bigcirc \\ & a_{22} & \\ \bigcirc & & \ddots \; a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Če je $D = \begin{bmatrix} d_1 & & \bigcirc \\ & d_2 & \\ \bigcirc & & \ddots \; d_n \end{bmatrix}$, pišemo $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

Matrike v M_n lahko poljubno množimo med sabo. Če je $A\in M_n$ in $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$, je

$$DA = \begin{bmatrix} d_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11}, \dots, d_1a_{1n} \\ d_2a_{21}, \dots, d_2a_{2n} \\ \dots \\ d_na_{n1}, \dots, d_na_{nn} \end{bmatrix}$$

in

$$AD = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \bigcirc \\ & d_2 & \\ \bigcirc & & \ddots \; d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1a_{11}, d_2a_{12}, \dots d_na_{1n} \\ d_1a_{21}, d_2a_{22}, \dots, d_na_{2n} \\ \dots \\ d_1a_{n1}, d_2a_{n2}, \dots, d_na_{nn} \end{bmatrix}$$

Če torej množimo A z D na levi, se prva vrstica pomnoži z d_1, druga z d_2, ... Če množimo A z D na desni, se prvi stolpec pomnoži z d_1, drugi stolpec z d_2, ...

Diagonalni matriki, ki ima na diagonali same enice, pravimo ENOTSKA MATRIKA in jo označimo z I ali z I_n, če želimo poudariti, da je I_n velikosti $n \times n$. Torej je $I = \mathrm{diag}(1,1,\dots,1)$. Če je $A \in M_n$, je po pravkar dokazanem

$$\boxed{AI = IA = A.}$$

Torej je I_n ENOTA ZA MNOŽENJE v M_n.

Če je $A \in M_n$, definiramo $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, ... Splošno naj bo

$$A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ faktorjev, enakih } A}.$$

Definiramo še: $A^0 = I$. Velja:

$$(A^n)^m = A^{nm}$$
$$A^{n+m} = A^n A^m \qquad (n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Če sta $A, B \in M_n$ diagonalni, je AB spet diagonalna:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & & 0 \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n b_n \end{bmatrix} = BA.$$

Kvadratna matrika je ZGORNJA TRIKOTNA, če ima pod diagonalo same ničle. Analogno je definirana SPODNJA TRIKOTNA matrika.

Če za kvadratno matriko A velja $A = A^T$, je A SIMETRIČNA matrika. Matrika A je simetrična natanko tedaj, ko je

$$\boxed{a_{ij} = a_{ji} \quad \text{za vse } i, j.}$$

NALOGE

Najbo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

1. Če je $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, izračunaj N^2, AN, NA, AN^T, N^TA, N^TAN, NAN^T.

2. Najbo $Q = N + N^T$. Izračunaj QAQ.

3. Najbo $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Izračunaj BA, AB in BAB.

4. Najbo $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunaj M^n za $n = 2, 3, \ldots$

* 5. Najbo $R = R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix}$ in

$$\begin{bmatrix} z_1 - y_1, & x_1 \\ x_1, & z_1 + y_1 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} z - y, & x \\ x, & z + y \end{bmatrix} R^T.$$

a) Izrazi x_1, y_1, z_1 z x, y, z.

b) Napiši 3×3 matriko A, da bo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{za vse } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

6. Najbo $D = \operatorname{diag}(1, -1, 2)$. Določi vse 3×3 matrike A, za katere je $DA = AD$.

7. Najbo A $m \times n$ matrika. Ali obstajata matriki AA^T in A^TA? Koliko vrstic (stolpcev) imata? Ali sta ti matriki simetrični?
Če je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, izračunaj A^TA in AA^T, $(A^TA)^2$ in $(AA^T)^2$.