5. MEŠANI PRODUKT TREH VEKTORJEV

MEŠANI PRODUKT vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

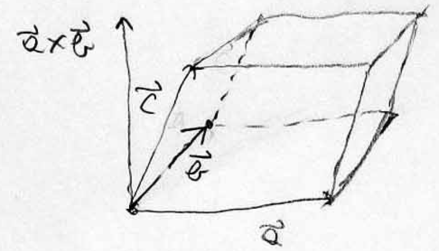
Hitro vidimo, da je v ortonormirani bazi

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Absolutna vrednost mešanega produkta je prostornina V paralelepipeda, napetega na $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$:

$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = V$$

Slika 1:



Od tod sledi:

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \text{ natanko tedaj, ko so } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ linearno odvisni.}}$$

Z determinantami vidimo:

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}).}$$

Pri cikličnih zamenjavah se mešani produkt ne spremeni.

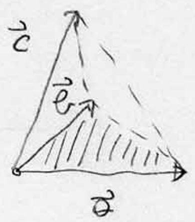
Od tod sledi:

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).}$$

Mešani produkt je v vseh faktorjih distributiven. Prav tako lahko izpostavimo skalar iz vsakega faktorja.

Primer: Prostornina tetraedra, napetega na vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (slika 2) je

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| .$$



slika 2

D. Primerjajmo naš tetraeder s paralelepipedom, napetim na $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Osnovna ploskev piramide ima ploščino $\frac{1}{2} S$, kjer je S ploščina osnovne ploskve paralelepipeda. Višina je enaka za obe telesi. Tako je prostornina piramide

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} S\right) v = \frac{1}{6} S v = \frac{1}{6} V' ,$$

kjer je $V' = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ prostornina paralelepipeda.

DVOJNI VEKTORSKI PRODUKT

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}}$$

Dokaz: Postavimo koordinatni sistem, tako da $\vec{a}$ leži na osi x, $\vec{b}$ v ravnini xy: $\vec{a} = (a_1, 0, 0)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, a_1 b_2).$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a_1 b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (-a_1 b_2 c_2, a_1 b_2 c_1, 0).$$

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = a_1 c_1 , \quad \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = b_1 c_1 + b_2 c_2 .$$

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} = (a_1 c_1 b_1, a_1 c_1 b_2)$$

$$-\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} = (-b_1 c_1 a_1 - b_2 c_2 a_1, 0, 0) . \qquad \square$$

<u>Posledica:</u> $$(\vec a\times\vec b)\cdot(\vec c\times d) = \begin{vmatrix} \langle \vec a,\vec c\rangle , & \langle \vec a,\vec d\rangle \\ \langle \vec b,\vec c\rangle , & \langle \vec b,\vec d\rangle \end{vmatrix}$$

Za $\vec a = \vec c$, $\vec b = \vec d$ je od tod

$$\|\vec a\times\vec b\|^2 = a^2 b^2 - (\langle \vec a,\vec b\rangle)^2 .$$

<u>D.</u> $(\vec a\times\vec b)\cdot(\vec c\times\vec d) = (\vec a\times\vec b, \vec c, \vec d) = \langle (\vec a\times\vec b)\times\vec c , \vec d\rangle =$

$= \langle \langle \vec a,\vec c\rangle\vec b - \langle \vec b,\vec c\rangle\vec a , \vec d\rangle = \langle \vec a,\vec c\rangle\langle \vec b,\vec d\rangle - \langle \vec b,\vec c\rangle\langle \vec a,\vec d\rangle .$