P. PRAVOKOTNA PROJEKCIJA

Posplošeni PITAGOROV IZREK v $\mathbb{K}^n$:

Če so vektorji $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ paroma pravokotni, se pravi

$$\vec{x}_i \perp \vec{x}_j \text{ za } i \neq j,$$

je

$$\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_m\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2 + \dots + \|\vec{x}_m\|^2 .$$

D. Leva stran je $\langle \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_m, \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_m \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle + \dots + \langle \vec{x}_m, \vec{x}_m \rangle$. □

Def. Če je $A \subset \mathbb{K}^n$ in $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, je $\vec{x} \perp A$, če je $\vec{x} \perp \vec{a}$ za vsak $\vec{a} \in A$. Če je $\vec{x} \perp \mathbb{K}^n$, je $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ in $\vec{x} = 0$.

Trdimo: Če so $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \perp A$, je $t_1\vec{x}_1 + \dots + t_m\vec{x}_m \perp A$.

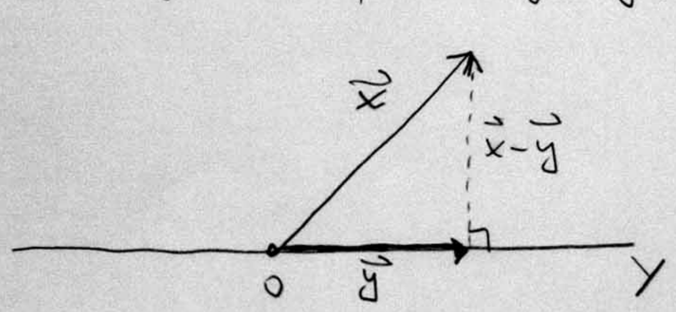
D. Za vsak $\vec{a} \in A$ je

$$\langle t_1\vec{x}_1 + \dots + t_m\vec{x}_m, \vec{a} \rangle = t_1 \underbrace{\langle \vec{x}_1, \vec{a} \rangle}_{0} + \dots + t_m \underbrace{\langle \vec{x}_m, \vec{a} \rangle}_{0} = 0 . \quad □$$

Def. Naj bo Y linearen podprostor v $\mathbb{K}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$. Vektor $\vec{y} \in Y$ je PRAVOKOTNA PROJEKCIJA vektorja $\vec{x}$ na podprostor Y, če je

$$\boxed{(\vec{x} - \vec{y}) \perp Y.} \qquad \text{(slika 1)}$$

Ker je $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{y} + (\vec{x} - \vec{y})\|^2 = \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$ po Pitagorovem izreku, je $\|\vec{y}\| < \|\vec{x}\|$, brž ko je $\vec{y} \neq \vec{x}$.



Slika 1

Izrek: Pravokotna projekcija $\vec{y}$ (če obstaja) je vektorju $\vec{x}$ najbližji vektor v Y.

Pravokotna projekcija vektorja $\vec{x}$ na Y je najboljša aproksimacija vektorja $\vec{x}$ z elementom podprostora Y.

D. Naj bo $\vec{z} \in Y$ poljuben. Potem je $\vec{y}-\vec{z} \in Y$ in $\vec{x}-\vec{z} = (\vec{x}-\vec{y})+(\vec{y}-\vec{z})$. Ker je $(\vec{x}-\vec{y}) \perp Y$, je $(\vec{x}-\vec{y}) \perp (\vec{y}-\vec{z})$ in po Pitagori:

$$\|\vec{x}-\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2 .$$

Če je $\vec{z} \neq \vec{y}$, je $\|x-\vec{z}\| > \|\vec{x}-\vec{y}\|$. □

Od tod tudi vidimo, da je pravokotna projekcija vektorja x na podprostor Y enolično določena.

Izrek: Naj bo $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m\}$ ortonormirana baza linearnega podprostora $Y \subseteq K^n$. Za vsak $\vec{x} \in K^n$ je

$$\boxed{P\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{x}, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i}$$

pravokotna projekcija vektorja $\vec{x}$ na Y.

D. Ker je $\langle P\vec{x}, \vec{f}_j \rangle = \langle \vec{x}, \vec{f}_j \rangle \langle \vec{f}_j, \vec{f}_j \rangle = \langle \vec{x}, \vec{f}_j \rangle$, je $\langle \vec{x} - P\vec{x}, \vec{f}_j \rangle = 0$ za $j = 1, \dots, m$. Torej je $(\vec{x} - P\vec{x}) \perp \vec{f}_j$ za vsak j od 1 do m. Sledi, da je vektor $(\vec{x} - P\vec{x})$ pravokoten na vsako linearno kombinacijo vektorjev $\vec{f}_j$, torej na vsak vektor iz Y. □

(Če je $Y = K^n$, [illegible] $\vec{x} - P\vec{x} \perp K^n$, torej $\vec{x} = P\vec{x}$. Zato je v tem primeru

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i .$$

GRAM-SCHMIDTOVA ORTOGONALIZACIJA

Naj bo $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\}$ linearno neodvisna množica v $\mathbb{K}^n$. Konstruirali bomo ONS $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m\}$, tako da za vsak r vektorji $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r$ razpenjajo isti podprostor kot $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r$.

ALGORITEM:

$$\boxed{\vec{f}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}} \qquad (1)$$

Če že poznamo $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r$ $(1 \leq r < m)$, naj bo

$$\boxed{\vec{g}_{r+1} = \vec{x}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \langle \vec{x}_{r+1}, \vec{f}_i \rangle \vec{f}_i .} \qquad (2)$$

$$\boxed{\vec{f}_{r+1} = \frac{\vec{g}_{r+1}}{\|\vec{g}_{r+1}\|} .} \qquad (3)$$

Razlaga. Ker smo v (2) od $\vec{x}_{r+1}$ odšteli pravokotno projekcijo tega vektorja na $\mathrm{Lin}\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r\}$, je $\vec{g}_{r+1} \perp \mathrm{Lin}\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r\}$.
Ker $\vec{x}_{r+1} \notin \mathrm{Lin}\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r\} = \mathrm{Lin}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r\}$, je $\vec{g}_{r+1} \neq 0$.

Primer: Imamo vektorje $\vec{a} = (2,0,2,1)$, $\vec{b} = (0,-2,1,-2)$ in $\vec{c} = (1,-1,1,-2)$.

a) Določimo pravokotno projekcijo vektorja $\vec{c}$ na $\mathrm{Lin}\{\vec{a},\vec{b}\}$.

b) Določimo pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na $\mathrm{Lin}\{\vec{b},\vec{c}\}$.

R. Ker je $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = 0$, vektorja $\vec{f}_1 = \frac{\vec{a}}{a}$ in $\vec{f}_2 = \frac{\vec{b}}{b}$ sestavljata ONB za $\mathrm{Lin}\{\vec{a},\vec{b}\}$. Torej je iskana projekcija enaka

$$\langle \vec{c},\vec{f}_1\rangle \vec{f}_1 + \langle \vec{c},\vec{f}_2\rangle \vec{f}_2 = \langle \vec{c}, \tfrac{1}{a}\vec{a}\rangle \tfrac{1}{a}\vec{a} + \langle \vec{c}, \tfrac{1}{b}\vec{b}\rangle \tfrac{1}{b}\vec{b} =$$
$$= \frac{1}{a^2}\langle \vec{c},\vec{a}\rangle \vec{a} + \frac{1}{b^2}\langle \vec{c},\vec{b}\rangle \vec{b}.$$

Tu je $a^2 = \langle \vec{a},\vec{a}\rangle = 9$, $b^2 = \langle \vec{b},\vec{b}\rangle = 9$, $\langle \vec{c},\vec{a}\rangle = 2$, $\langle \vec{c},\vec{b}\rangle = 7$. Torej je iskana projekcija enaka

$$\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b} = \frac{1}{9}(2\vec{a}+7\vec{b}) = \underline{\underline{\frac{1}{9}(4,-14,11,-12)}}.$$

b) Lahko bi naredili Gram-Schmidtov postopek na $\{\vec{b},\vec{c}\}$ in dobili ONB za $\mathrm{Lin}\{\vec{b},\vec{c}\}$, nato pa nadaljevali kot prej. Raje naredimo takole. Iskana projekcija leži v $\mathrm{Lin}\{\vec{b},\vec{c}\}$ in je torej enaka $x\vec{b}+y\vec{c}$, pri čemer je $(\vec{a}-x\vec{b}-y\vec{c}) \perp \mathrm{Lin}\{\vec{b},\vec{c}\}$, kar je enakovredno temu, da je

$$\langle \vec{a}-x\vec{b}-y\vec{c}, \vec{b}\rangle = 0$$

in

$$\langle \vec{a}-x\vec{b}-y\vec{c}, \vec{c}\rangle = 0,$$

se pravi

$$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = x\langle \vec{b},\vec{b}\rangle + y\langle \vec{c},\vec{b}\rangle$$
$$\langle \vec{a},\vec{c}\rangle = x\langle \vec{b},\vec{c}\rangle + y\langle \vec{c},\vec{c}\rangle.$$

Upoštevajmo, da je $\langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = 7$, pa dobimo sistem

$$\begin{aligned} 9x + 7y &= 0 \\ 7x + 7y &= 2 . \end{aligned}$$

Od tod je $x = -1$, $y = \frac{9}{7}$ in naša pravokotna projekcija znaša

$$-\vec{b} + \frac{9}{7}\vec{c} = \underline{\underline{\frac{1}{7}(9,5,2,-4)}}.$$

NALOGE

1. Pokaži, da vektorja $\vec{g}_1 = \frac{1}{3}(-2,1,2)$ in $\vec{g}_2 = \frac{1}{3}(2,2,1)$ sestavljata ONS v $\mathbb{R}^3$. Naj bo $Y = \text{Lin}\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$. Določi pravokotno projekcijo vektorja $\vec{x}$ na Y, če je

   a) $\vec{x} = (-1,0,1)$; b) $\vec{x} = (2,-2,1)$.

   c) Določi $\vec{g}_3$, da bo $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ ONB za $\mathbb{R}^3$.

   * Naj bo $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotni projektor na Y. Določi matriko za P:

   d) v bazi $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$;

   e) v standardni ONB prostora $\mathbb{R}^3$.

2. Izvedi Gram-Schmidtov ortogonalizacijski postopek:

   a) na paru vektorjev $(1,-2,2,-3)$, $(1,-1,0,7)$;

   b) na trojici $(1,2,2,-1)$, $(2,3,-3,2)$, $(1,1,1,-1)$.

   c) na paru vektorjev $(0,-2,1,-2)$ in $(1,-1,1,-2)$.

3. Naj bo $\vec{a} = (2,0,-2,1)$, $\vec{b} = (0,-3,0,4)$, $\vec{c} = (0,4,0,3)$.
   Določi pravokotno projekcijo:

   a) vektorja $\vec{a}$ na $\text{Lin}\{\vec{b}, \vec{c}\}$,

   * b) vektorja $\vec{a} + 2\vec{c}$ na $\text{Lin}\{\vec{b}, \vec{c}\}$,

   * c) vektorja $2\vec{c} + \vec{a}$ na $\text{Lin}\{\vec{a}, \vec{c}\}$;

   * d) vektorja $\vec{b}$ na $\text{Lin}\{\vec{a}, \vec{c}\}$,

   * e) vektorja $2\vec{b} - \vec{a}$ na $\text{Lin}\{\vec{a}, \vec{c}\}$.