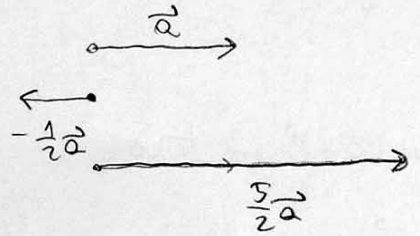
2. PRODUKT VEKTORJA S SKALARJEM

Pri računanju z vektorji običajnim (realnim) številom rečemo SKALARJI, tako da poudarimo razliko z vektorji.

Naj bo $\vec{a}$ vektor in m skalar. Produkt vektorja $\vec{a}$ s skalarjem m je vektor $m\vec{a}$, ki je:

1) vzporeden vektorju $\vec{a}$;
2) $\|m\vec{a}\| = |m| \cdot \|\vec{a}\|$
3) Če je $m > 0$, je $m\vec{a}$ enako usmerjen kot $\vec{a}$.
   Če je $m < 0$, je $m\vec{a}$ nasprotno usmerjen kot $\vec{a}$.



Slika 1

Lastnosti: $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$, $0\vec{a} = 0$.

Veljajo običajna računska pravila:

$$n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a}$$
$$(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$
$$m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$$

Lahko tudi delimo z neničelnim skalarjem:

$$\frac{\vec{a}}{m} = m^{-1}\vec{a} \qquad (m \neq 0).$$

Če je $\vec{a} \neq 0$, je

$$\boxed{\vec{e} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}}$$

ENOTSKI VEKTOR V SMERI VEKTORJA $\vec{a}$.

Primer produkta s skalarjem je NEWTONOV ZAKON:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

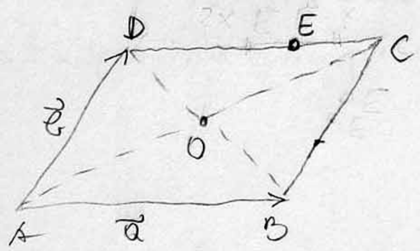
LINEARNE KOMBINACIJE IN LINEARNA ODVISNOST

LINEARNA KOMBINACIJA vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vsak izraz

$$m\vec{a} + n\vec{b},$$

kjer sta m, n skalarja.

PRIMER: V paralelogramu ABCD naj bo O presečišče diagonal (slika 1)



Slika 1

Če je $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, je $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ in tako

$$\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Denimo, da točka E leži na stranici DC in da je $|DE| : |EC| = 2 : 1$.
Potem je $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{DC} = \frac{2}{3}\vec{a}$. Tako je

$$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$$

in recimo $\vec{OE} = \vec{AE} - \vec{AO} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{a}$.

Def. Če imamo vektorje $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ $(n \geq 1)$, vsakemu izrazu

$$m_1\vec{a}_1 + \cdots + m_n\vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i$$

rečemo LINEARNA KOMBINACIJA vektorjev $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Taka kombinacija je TRIVIALNA, če je $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 0$. (V tem primeru je njena vrednost seveda 0.) Kombinacija je NETRIVIALNA, če je vsaj eno od števil $m_1, \ldots, m_n$ od 0 različno.

Def. Vektorji $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ so LINEARNO ODVISNI, če lahko enega med njimi izrazimo kot linearno kombinacijo preostalih.

PRIMERI: 1. Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$ so linearno odvisni, saj je zadnji vektor linearna kombinacija preostalih dveh.

2. Vsaka množica vektorjev, ki vsebuje 0, je linearno odvisna.
Res: 0 je trivialna kombinacija preostalih vektorjev.

3. Če sta $\vec{a}, \vec{b}$ poljubna vektorja, so vektorji:

$$\vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{a}$$

linearno odvisni. Namreč: $\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

Def. Vektorji $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ so LINEARNO NEODVISNI, če niso linearno odvisni.

Izrek: Vektorji $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ so linearno neodvisni natanko takrat, ko iz

$$m_1\vec{a}_1 + \dots + m_n\vec{a}_n = 0$$

sledi $m_1 = \dots = m_n = 0$. (Edina trivialna linearna kombinacija teh vektorjev je enaka 0.)

D. Denimo, da $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ niso linearno odvisni. Če velja $m_1\vec{a}_1 + \dots + m_n\vec{a}_n = 0$ in bi bil denimo $m_n \neq 0$, je
$\vec{a}_n = -\frac{m_1}{m_n}\vec{a}_1 - \dots - \frac{m_{n-1}}{m_n}\vec{a}_n$, kar ni mogoče. Torej je $m_1 = \dots = m_n = 0$.

Denimo, da so vektorji $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linearno odvisni. Če je recimo
$\vec{a}_n = t_1\vec{a}_1 + \dots + t_{n-1}\vec{a}_{n-1}$, imamo $(-1)\vec{a}_n + t_1\vec{a}_1 + \dots + t_n\vec{a}_n = 0$.
Dobili smo netrivialno linearno kombinacijo teh vektorjev, ki je enaka 0.

Posledica: Vektorji $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ so linearno neodvisni natanko

takrat, ko iz

$$m_1\vec{a}_1 + \cdots + m_n\vec{a}_n = t_1\vec{a}_1 + \cdots + t_n\vec{a}_n \quad (1)$$

sledi $m_1 = t_1, \ldots, m_n = t_n$.

D. Če so $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linearno neodvisni, enakost (1) lahko

preoblikujemo v

$$(m_1 - t_1)\vec{a}_1 + \cdots + (m_n - t_n)\vec{a}_n = 0 .$$

Od tod sledi $m_1 - t_1 = 0, \ldots, m_n - t_n = 0$, se pravi $m_1 = t_1, \ldots, m_n = t_n$.

V nasprotno smer: iz $m_1\vec{a}_1 + \cdots + m_n\vec{a}_n = 0 = 0\vec{a}_1 + \cdots + 0\vec{a}_n$

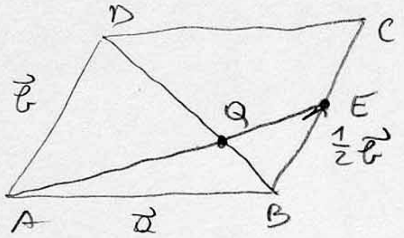
sledi $m_1 = 0, \ldots, m_n = 0$. □

Izrek: Vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ sta linearno odvisna natanko takrat, ko sta KOLINEARNA, se pravi, da ležita na isti premici, če ju narišemo tako, da imata skupno izhodišče. Drugače rečeno: dva vektorja sta linearno odvisna natanko takrat, ko sta vzporedna.

Dokaz: Če je $\vec{a} = m\vec{b}$, sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna. Če $\vec{a}$, $\vec{b}$ ležita na isti premici in je eden od njiju enak 0, sta linearno odvisna. Če sta kolinearna in neničelna, je $\vec{a} = m\vec{b}$ za primeren skalar m.

Primer: Naj bo ABCD paralelogram in E razpolovišče stranice BC. Naj bo Q presečišče daljice AE in diagonale BD. V kakšnem razmerju deli Q diagonalo BD?

Rešitev: Označimo $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$ (slika 1).



Velja: $\vec{AE} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Ker sta $\vec{AQ}$ in $\vec{AE}$ kolinearna, je

$$\vec{AQ} = m\vec{AE} = m\left(\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}\right) = m\vec{a} + \tfrac{1}{2}m\vec{b}$$

za neki $m \in \mathbb{R}$. Prav tako je $\vec{BQ} = n\vec{BD} = n(\vec{b} - \vec{a}) = n\vec{b} - n\vec{a}$ za neki $n \in \mathbb{R}$. Ker je $\vec{AQ} = \vec{a} + \vec{BQ}$, je

$$\vec{a} + n\vec{b} - n\vec{a} = m\vec{a} + \tfrac{1}{2}m\vec{b}.$$

$$(1-n)\vec{a} + n\vec{b} = m\vec{a} + \tfrac{1}{2}m\vec{b}.$$

Ker sta $\vec{a}$, $\vec{b}$ linearno neodvisna, se ujemata koeficienta pri $\vec{a}$:

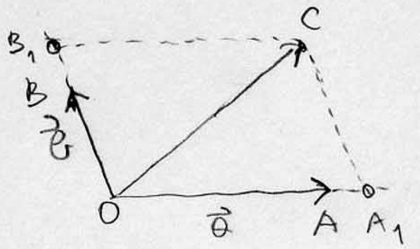
$$1 - n = m$$

Enako vidimo $n = \frac{1}{2}m$.

Tako je $1 = \frac{3}{2}m$ in $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{2}m = \frac{1}{3}$.

Torej je $\vec{BQ} = \frac{1}{3}\vec{BD}$ in od tod $\vec{QD} = \frac{2}{3}\vec{BD}$. Torej je $|BQ| : |QD| = 1 : 2$.

Izrek: Naj bosta $\vec{a}, \vec{b}$ linearno neodvisna vektorja s skupnim izhodiščem. Vsak vektor v ravnini vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ lahko na en in en sam način izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$.



Slika 2

D. Na sliki 2 je $A_1C \parallel OB$, $B_1C \parallel OA$. Tako je $\vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1}$.
Pri tem je $\vec{OA_1} = m\vec{OA} = m\vec{a}$ in $\vec{OB_1} = n\vec{OB} = n\vec{b}$ za primerna $m, n \in \mathbb{R}$.
Tako je $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.
Ker sta $\vec{a}, \vec{b}$ linearno neodvisna, je ta vsota enolična.

Posledica: Trije vektorji so linearno odvisni natanko takrat, ko leže na isti ravnini (ali na vzporednih ravninah). Kratko: Trije vektorji so linearno odvisni natanko takrat, ko so KOPLANARNI.

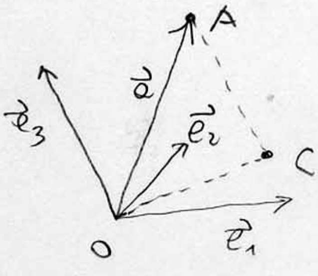
Def. Vsaki trojici linearno neodvisnih vektorjev rečemo <u>BAZA PROSTORA</u> ali <u>KOORDINATNI SISTEM</u> v prostoru.

Izrek: Naj bo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ baza prostora. Potem lahko vsak vektor $\vec{a}$ zapišemo na en in samo način kot linearno kombinacijo baznih vektorjev $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 .$$

Števila a_1, a_2, a_3 so <u>KOORDINATE</u> vektorja $\vec{a}$ v dani bazi. Vektorji $a_1\vec{e}_1$, $a_2\vec{e}_2$, $a_3\vec{e}_3$ pa so <u>KOMPONENTE</u> vektorja $\vec{a}$ v tej bazi.

Narišimo $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, tako da se začenjajo v isti točki O. Naj bo Π ravnina vektorjev $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Naj bo $\vec{a} = \vec{OA}$. Če je $\vec{a}$ v Π, je $\vec{a}$ linearna kombinacija vektorjev $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Sicer skozi A narišemo vzporednico vektorju $\vec{e}_3$. Naj bo C presečišče te vzporednice s Π (slika 3). Pravimo, da je C <u>VZPOREDNA PROJEKCIJA</u> točke A <u>NA RAVNINO Π VZDOLŽ VEKTORJA $\vec{e}_3$</u> (<u>vzporedno vektorju $\vec{e}_3$</u>).



Slika 3

Seveda je $\vec{CA} = a_3\vec{e}_3$ in $\vec{OC} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$. Tako je

$$\vec{a} = \vec{OC} + \vec{CA} = m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2 + m_3\vec{e}_3 .$$

Kot vemo, je to izražava enolična.

Vsak vektor je v dani bazi s koordinatami enolično določen. Tako lahko namesto z vektorjem računamo s trojico njegovih koordinat.

Če je denimo še $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, je

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3$$

in

$$m\vec{a} = (ma_1)\vec{e}_1 + (ma_2)\vec{e}_2 + (ma_3)\vec{e}_3.$$

Zapomnimo si še: Vzporedna projekcija vektorja $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ na ravnino vektorjev $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_2$ vzdolž vektorja $\vec{e}_3$ je enaka $a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$.