8. RAČUNANJE Z LINEARNIMI PRESLIKAVAMI

Naj bosta $A, B : X \to Y$ linearni preslikavi in α skalar.

Definirajmo preslikavi $A+B$, $\alpha A : X \to Y$ z

$$\boxed{\begin{aligned} (A+B)x &= Ax + Bx \\ (\alpha A)x &= \alpha(Ax) \end{aligned}} \qquad (x \in X).$$

Lahko je videti, da sta $A+B$, αA spet linearni preslikavi iz X v Y. Množica

$$L(X,Y)$$

vseh linearnih preslikav iz X v Y pa je vektorski prostor za tako definirano seštevanje in množenje s skalarjem. Ničelni element je ničelna preslikava, nasprotni element k A je $(-1)A$.

Imejmo bazo $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ za X in bazo $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ za Y. Matrika preslikave $A+B$ je vsota matrike za A in matrike za B, matrika za αA je α krat matrika za A:

$$(A+B)_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = A_{\mathcal{E}\mathcal{F}} + B_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$$

$$(\alpha A)_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \alpha(A_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) \qquad (\alpha \in \mathbb{K}).$$

Def. Naj bosta $A : X \to Y$ in $B : Y \to Z$ linearni preslikavi. Produkt BA je preslikava iz X v Z, določena z

$$\boxed{(BA)x = B(Ax).}$$

Vidimo, da je BA pravzaprav kompozitum $B \circ A$. Zato je jasno, da je BA spet linearna preslikava.

Ker je komponiranje preslikav asociativno, to velja tudi za množenje linearnih preslikav.

Primeri: 1. Naj bo $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vrtenje za kot α okrog O. Potem je $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$.

2. Naj bo $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez ravnino Σ, ki vsebuje O. Potem je $Z^2\vec{x} = Z(Z\vec{x}) = \vec{x}$ za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Torej je Z^2 identična preslikava na $\mathbb{R}^3$, kratko $Z^2 = I$.

3. Naj bo $\mathcal{P}_n$ prostor polinomov stopnje največ n in $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ operator odvajanja. Potem je $D^2 p = p''$, ... $D^k p = p^{(k)}$ in $D^{n+1} p = 0$ za vsak $p \in \mathcal{P}_n$, torej $D^{n+1} = 0$.

Naj bosta $A_1, A_2 : X \to Y$ linearni preslikavi in $B : Y \to Z$ tudi linearna. Potem je

$$\boxed{B(A_1+A_2) = BA_1 + BA_2.}$$

Res: $B(A_1+A_2)x = B((A_1+A_2)x) = B(A_1x + A_2x) = BA_1x + BA_2x =$
$= (BA_1 + BA_2)x$.

Enako vidimo: če je $A : X \to Y$ linearna in sta $B_1, B_2 : Y \to Z$ linearni, je

$$\boxed{(B_1+B_2)A = B_1A + B_2A.}$$

Množenje linearnih preslikav je distributivno.

Izrek: Imejmo izbrane baze: $\mathcal{E}$ v X, $\mathcal{F}$ v Y in $\mathcal{G}$ v Z. Naj bosta $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$ linearni preslikavi. Matrika za BA je enaka produktu matrike za B z matriko za A:

$$(BA)_{\mathcal{E}\mathcal{G}} = B_{\mathcal{F}\mathcal{G}} A_{\mathcal{E}\mathcal{F}}.$$

D. Naj bo $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$, $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_r\}$.
Potem je

$$(BA)e_j = B(Ae_j) = B\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Bf_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{ki} g_k\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} a_{ij} b_{ki} g_k = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) g_k .$$

Označimo s C produkt matrike za B in matrike za A,
$C = B_{\mathcal{F}\mathcal{G}} \cdot A_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$. Potem je $c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}$ in torej
$$(BA)e_j = \sum_{k=1}^{r} c_{kj} g_k .$$

Torej je j-ti stolpec matrike za BA enak j-temu stolpcu matrike C, in to velja za vsak j od 1 do n. □

Primer: Naj bo $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vrtenje za kot α okrog 0. Matrika za R_α je
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Ker je $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$, je
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta, & -\sin\beta \\ \sin\beta, & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta), & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta), & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

Pred časom smo to preverjali, zdaj računanje ni potrebno.

ALGEBRA LINEARNIH OPERATORJEV

Označimo z $L(X)$ vektorski prostor vseh linearnih operatorjev na X, to je vseh linearnih preslikav iz X v X. V $L(X)$ lahko neovirano seštevamo, množimo in množimo s skalarjem, pri čemer veljajo običajni računski zakoni, razen komutativnosti množenja. Enota za množenje je <u>IDENTIČNI OPERATOR</u> I, definiran z $Ix = x$ za vsak $x \in X$. Pravimo, da je $L(X)$ <u>ALGEBRA</u> vseh linearnih operatorjev na X.

Če je $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ baza vektorskega prostora X, vsakemu operatorju $A \in \mathcal{L}(X)$ pripada matrika $\phi(A) = A_{\mathcal{F}\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}$. Preslikava ϕ ohranja vsoto in produkt s skalarjem, zato je linearna. Če je $\phi(A) = 0$, pomeni, da je $Af_j = 0$ za $j = 1, \ldots, n$. Ker je $\mathcal{F}$ baza, je $A = 0$. Torej je $\ker \phi = \{0\}$ in ϕ injektivna. Ker je $\phi : L(X) \to M_n$ tudi surjektivna (to ni težko videti), je $\phi : L(X) \to M_n$ izomorfizem, ki ohranja tudi produkt. Tako je ϕ izomorfizem med algebrama $L(X)$ in M_n.

Vsako matriko $B \in M_n$ imamo lahko za linearen operator na $\mathbb{R}^n$. Jasno je, da je $\phi(B) = B$. Denimo, da je rang $B = n$. Potem je $\operatorname{im} B = \mathbb{R}^n$, zato je endomorfizem B bijektiven. Torej obstaja inverzni operator B^{-1}, tako da je $BB^{-1} = B^{-1}B = I$. Če je A matrika za B^{-1}, je $BA = AB = I$. Tako je A inverz matrike B. Dokazali smo: Če je rang $B = n$, je B obrnljiva in tako nesingularna. Že prej smo dokazali sklep v nasprotni smeri. Tako velja:

<u>Kvadratna $n \times n$ matrika B je nesingularna natanko takrat, ko je rang $B = n$.</u>

Naslednji posledici veljata za poljubne matrike (ne nujno kvadratne):

Posledica 1: Če v matriki A $m \times n$ obstaja nesingularna $r \times r$ podmatrika, je rang $A \geq r$. (Ni potrebno, da je A kvadratna.)

Dokaz. Ker je rang te podmatrike enak r, so stolpci v njej linearno neodvisni. Potem pa so tudi ustrezni „podaljšani" stolpci v originalni matriki $A \in M_{mn}$ linearno neodvisni.

Posledica 2: Če ima matrika A rang r, v A obstaja nesingularna $r \times r$ podmatrika.

Dokaz. Obstajajo vrstice $B_1, \ldots, B_r$ matrike $A \in M_{mn}$, ki so linearno neodvisne. Iz teh vrstic sestavimo matriko B razsežnosti $r \times n$. Ker je rang $B = r$, ima B r linearno neodvisnih stolpcev. Ti stolpci sestavljajo $r \times r$ podmatriko ranga r, ki je nesingularna. □

NALOGE

1. Naj bo Σ ravnina skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$ in Z zrcaljenje čez Σ. Določi Z^2 in Z^{-1}.

2. Naj bo p premica skozi 0 v $\mathbb{R}^3$. Naj bo R_α vrtenje za kot α okrog p. Določi R_α^3 in R_α^{-1}.

3. Naj bo $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotni projektor na ravnino xy.
   a) Za $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ izračunaj $P^2\vec{x}$. Čemu je enak P^2?
   b) Ali obstaja P^{-1}?

4. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
   a) Koliko je rang A?
   b) Določi vse nesingularne 2×2 podmatrike v A.

5. Naj bo Z_1 zrcaljenje čez os x, Z_2 zrcaljenje čez os y v $\mathbb{R}^2$.

a) Napiši matriki za Z_1, Z_2.

b) Kakšna je zveza med Z_1 in Z_2?

c) Izračunaj $Z_1 Z_2$ in $Z_2 Z_1$.

d) Izračunaj $Z_1 Z_2 Z_1$.

6. Naj bo Z zrcaljenje čez vhodišče v $\mathbb{R}^3$.

a) Določi Z^2 in Z^{-1}

b) Napiši matriko za Z.

7. Naj bo R_α vrtenje za kot α okrog 0 v $\mathbb{R}^2$ in Z zrcaljenje čez os x v $\mathbb{R}^2$.

a) Določi matriki za Z, R_α.

b) Čemu je enak produkt $Z R_\alpha Z$? (Pomagaj si z matrikami.)

c) Ali Z in R_α komutirata?