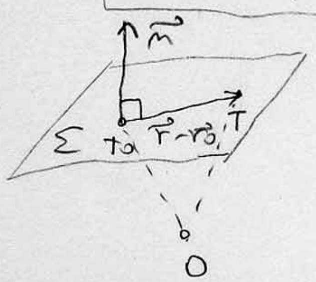
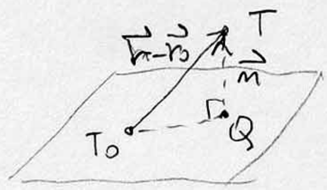
8. RAVNINA

Če je $\vec{n}$ neničelni vektor, pravokoten na ravnino Σ, pravimo, da je $\vec{n}$ NORMALA ravnine Σ. Naj bo $T_0 \in \Sigma$ in $\vec{r}_0$ krajevni vektor točke T_0. Točka T s krajevnim vektorjem $\vec{r}$ leži na Σ natanko tedaj, ko je $\overrightarrow{T_0T} \perp \Sigma$ (slika 1), se pravi

$$\boxed{\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n} \rangle = 0.}$$



Slika 1



Slika 2

Če označimo $\langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle = d$, smo dobili NORMALNO ENAČBO ravnine:

$$\boxed{\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle - d = 0} \qquad (1)$$

Če je $\vec{n} = (a, b, c)$, je

$$\boxed{ax + by + cz - d = 0} \qquad (2)$$

Če so a, b, c števila, ki niso vsa enaka 0, je (2) enačba ravnine v prostoru. Njena normala (normalni vektor) je (a, b, c).

Izračunajmo razdaljo točke $T(x, y, z)$ od ravnine z enačbo (1). Če je $\vec{r}_0$ na ravnini, se pravi $\langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle = d$, in Q pravokotna projekcija točke T na ravnino, je iskana razdalja enaka $|QT|$. Pri tem je $\overrightarrow{QT}$ pravokotna projekcija vektorja $\overrightarrow{T_0T} = \vec{r} - \vec{r}_0$ na smer vektorja $\vec{n}$. Če je $\vec{e} = \frac{\vec{n}}{n}$, je, kot vemo,

$$\boxed{\overrightarrow{QT} = \langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{e} \rangle \vec{e}}$$

Od tod je $\vec{r}_Q = \vec{r} + \vec{TQ} = \vec{r} - \langle \vec{r}-\vec{r}_0, \vec{e} \rangle \vec{e}$, kar nam da koordinate točke Q. Ker je $\vec{e}$ enotski vektor, je

$$|QT| = |\langle \vec{r}-\vec{r}_0, \vec{e} \rangle| = |\langle \vec{r}-\vec{r}_0, \frac{\vec{n}}{n} \rangle| = \left|\frac{1}{n}\left(\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle - \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle\right)\right| =$$
$$= \frac{|\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle - d|}{n}$$

Razdalja med točko $\vec{r}$ in ravnino z enačbo (1) je

$$\boxed{\frac{|\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle - d|}{n}}$$

Če je ravnina dana z enačbo (2), je iskana razdalja

$$\boxed{\frac{|ax+by+cz-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

PRIMER: Imamo ravnino $2x-y-2z=24$ in točko $A(-3,2,2)$.

Določimo:
1) razdaljo med A in ravnino;
2) pravokotno projekcijo Q točke na ravnino;
3) zrcalno sliko B točke A glede na ravnino.

Rešitev: 1) Razdalja točke (x,y,z) od ravnine je

$$\frac{|2x-y-2z-24|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{|2x-y-2z-24|}{3}$$

Postavimo $x=-3$, $y=2$, $z=2$, pa je ta razdalja

$$\frac{1}{3}\,|-6-2-4-24| = \underline{\underline{12}}.$$

2) Normala naše ravnine je $\vec{n} = (2,-1,-2)$. Enotski vektor v smeri vektorja $\vec{n}$ je $\vec{e} = \frac{\vec{n}}{n} = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$.

Potrebujemo neko točko na ravnini. Če v enačbi $2x-y-2z=24$ postavimo $x=y=0$, je $z=-12$. Torej je $\vec{r}_0=(0,0,-12)$ točka na ravnini. Od tod je $\vec{r}_A-\vec{r}_0=(-3,2,2)+(0,0,12)=(-3,2,14)$ in

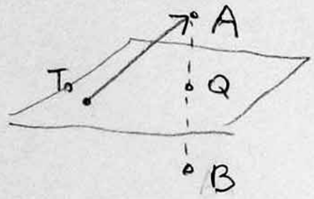
$$\vec{QA}=\langle \vec{r}-\vec{r}_0,\vec{e}\rangle\vec{e}=\frac{1}{9}\langle(-3,2,14),(2,-1-2)\rangle(2,-1,-2)=$$

$$=\frac{1}{9}(-36)(2,-1,-2)=-4(2,-1,-2)$$

in $\vec{AQ}=4(2,-1,-2)=(8,-4,-8)$.

Torej je $\vec{r}_Q=\vec{r}_A+\vec{AQ}=(-3,2,2)+(8,-4,-8)=(5,-2,-6)$.

Pravokotna projekcija je $Q(5,-2,-6)$.



Slika 3

Preverimo: $|\vec{AQ}|=4|(-2,-1,-2)|=4\cdot 3=12$.

To je prej izračunana razdalja med A in ravnino.

3) Točka Q je razpolovišče daljice AB, ker je (slika 3)

$$\vec{r}_Q=\frac{1}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_B)$$

Od tod je $\vec{r}_B=2\vec{r}_Q-\vec{r}_A=(10,-4,-12)-(-3,2,2)=$

$=(13,-6,-14)$.

Prezrcaljena točka je $B(13,-6,-14)$.

Kaj pomeni enačba $ax+by-d=0$? To je lahko:

1) Enačba ravnine Σ v prostoru z normalo $(a, b, 0)$. Ta ravnina je vzporedna osi z in pravokotna na ravnino xy.

2) Enačba premice v ravnini xy. Ta premica je presek ravnine Σ iz točke (1) z ravnino xy. Normala te premice je (a, b). Torej je vektor (a, b) pravokoten na premico z enačbo $ax+by-d=0$.

Razdalja točke $T(x, y)$ od premice $ax+by-d=0$ je enaka razdalji točke $(x, y, 0)$ od ravnine Σ, torej enaka

$$\frac{|ax+by-d|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Presečišče premice in ravnine

Imamo ravnino z enačbo $\langle \vec r, \vec n \rangle - d = 0$ in premico z enačbo $\vec r = \vec r_0 + t\vec a$. Iščemo t, tako da bo $\vec r_0 + t\vec a$ ležala na ravnini, torej zadoščala enačbi ravnine:

$$\langle \vec r_0 + t\vec a, \vec n \rangle - d = 0$$

$$\vec r_0 \cdot \vec n + t\langle \vec a, \vec n \rangle = d$$

Če je $\langle \vec a, \vec n \rangle \neq 0$, od tod izračunamo t in potem presečišče $\vec r = \vec r_0 + t\vec a$. Če je $\langle \vec a, \vec n \rangle = 0$, je premica vzporedna ravnini.

Tudi na ta način lahko poiščemo pravokotno projekcijo Q točke $\vec r_1$ na ravnino z enačbo $\langle \vec r, \vec n \rangle - d = 0$. Skozi $\vec r_1$ napeljemo premico s smernim vektorjem $\vec n$. Presečišče te premice z ravnino je Q.

Kot med dvema ravninama je kot med normalama teh ravnin. Ravnini sta vzporedni natanko tedaj, ko sta njuni normali kolinearni.

Če se ravnini z normalama $\vec n_1$ in $\vec n_2$ sekata, je $\vec n_1 \times \vec n_2$ vektor na presečnici, saj je pravokoten na $\vec n_1$ in $\vec n_2$.

PARAMETRIČNA ENAČBA RAVNINE

Ravnino Σ lahko podamo s točko T_0 na ravnini in z nekolinearnima vektorjema $\vec a, \vec b$ na ravnini Σ. Če je T poljubna točka na ravnini s krajevnim vektorjem $\vec r$, leži $\overrightarrow{T_0T}$ v Σ in je torej

$$\overrightarrow{T_0T} = s\vec a + t\vec b$$

za primerni realni števili s, t, ki jima pravimo parametra.

Torej je $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{T_0T} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}$.

Enačba

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a} + t\vec{b}} \qquad (s,t \in \mathbb{R})$$

je PARAMETRIČNA ENAČBA ravnine Σ. Za dano točko $\vec{r}$ sta parametra s,t enolično določena. Normala te ravnine je

$$\vec{a} \times \vec{b}.$$

ENAČBA RAVNINE SKOZI TRI TOČKE

Imamo točke $T_1(x_1,y_1,z_1)$, $T_2(x_2,y_2,z_2)$ in $T_3(x_3,y_3,z_3)$, ki ne leže na isti premici. Potem sta $\overrightarrow{T_1T_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ in $\overrightarrow{T_1T_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ nekolinearna vektorja na ravnini Σ skozi T_1, T_2, T_3. Torej je

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + s(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + t(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \qquad (s,t \in \mathbb{R})$$

parametrična enačba dane ravnine.

Normala te ravnine je $\vec{n} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$. Torej je normalna enačba te ravnine

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0,$$

se pravi

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \left((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\right) = (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0.$$

Torej je

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0}$$

V koordinatah:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1, & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$