10. SISTEMI LINEARNIH ENAČB

LINEARNA ENAČBA za neznanke $x_1, x_2, \dots, x_n$ ima obliko

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$$

Števila $a_1, \dots, a_n$ so **KOEFICIENTI** enačbe, b je **DESNA STRAN**.
Če je $b = 0$, je enačba **HOMOGENA**. Homogena enačba ima zmeraj rešitev $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Sistem m linearnih enačb z n neznankami: $x_1, \dots, x_n$ zapišemo takole:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

Če pišemo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

je A **MATRIKA SISTEMA**, x stolpec neznank, b stolpec desnih strani in naš sistem lahko zapišemo:

$$Ax = b.$$

Če so vse desne strani enake 0, se pravi $b = 0$, je sistem **HOMOGEN**. Tak sistem ima rešitev $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Seveda pa ima lahko še druge rešitve.

Sistem je lahko brez rešitev. Pravimo, da je **NEREŠLJIV**, **PROTISLOVEN**, **NEKOMPATIBILEN**.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1
\end{aligned}$$

je nerešljiv sistem dveh enačb s štirimi neznankami.

REŠITI sistem pomeni poiskati vse rešitve, se pravi vse **urejene n-terice** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ki ustrezajo sistemu.

Dva sistema sta **EKVIVALENTNA**, če imata isto množico rešitev. Npr. enačbi: $5x = 40$ in $x = 8$ sta ekvivalentni.

GAUSSOVA ELIMINACIJA

To je metoda, s katero sistem predelamo v ekvivalenten sistem, iz katerega je takoj razvidno, ali je sistem rešljiv, nato pa je lahko izračunati rešitve. Uporabljamo tri **ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE**:

I. pomnožimo eno od enačb s skalarjem in jo prištejemo drugi enačbi;

II. pomnožimo eno od enačb z neničelnim skalarjem;

III. zamenjamo dve enačbi.

Jasno je, da transformaciji tipa II in III sistem prevedeta na ekvivalenten sistem. Denimo, da smo uporabili transformacijo tipa I. Če $x_1, \dots, x_n$ zadoščajo prvotnemu sistemu, zadoščajo predelanemu sistemu. Ker pa lahko predelani sistem s transformacijo tipa I spravimo nazaj v prvotno stanje (če smo prej enačbo pomnožili s t, jo zdaj z $(-t)$), sta oba sistema ekvivalentna.

PRIMER: Določimo presek ravnin z enačbama:

$$x + 2y - z = -3$$
$$-3x - 6y - 2z = 14.$$

Poskusimo z elementarno transformacijo odstraniti x iz druge enačbe. Pomnožimo prvo enačbo s 3 in prištejmo drugi enačbi;

$$3(x+2y-z)-3x-5y-2z=3(-3)+14.$$

ali $\quad -5z=5$

Zdaj imamo enakovreden sistem:

$$x+2y-z=-3$$
$$-5z=5$$

Pomnožimo zadnjo enačbo z $-\frac{1}{5}$, pa dobimo sistem

$$x+2y-z=-3$$
$$z=-1$$

Prištejmo zadnjo enačbo prvi:

$$x+2y=-4.$$

Tako smo dobili ekvivalenten sistem:

$$x+2y=-4 \qquad (1)$$
$$z=-1. \qquad (2)$$

Spremenljivka z je torej enolično določena. Med x in y pa je zveza (1). Očitno lahko vrednost za y izberemo poljubno, potem pa je x določena z (1). Torej:

$$x=-2y-4$$
$$y=y$$
$$z=-1.$$

ali vektorsko:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y-4 \\ y \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (y \in \mathbb{R})$$

To je parametrična enačba premice (parameter je y).
Premica vsebuje točko $(-4,0,-1)$, in $(-2,1,0)$ je vektor na premici.
To pravzaprav lahko vidimo iz (2) in (1): premica je vzporedna ravnini xy, leži v ravnini $z=-1$. Njena pravokotna projekcija na ravnino xy ima enačbo $x+2y=-4$.

Precej pisanja si prihranimo, če računamo le s koeficienti in desnimi stranmi. Naš sistem zapišemo takole: matriki sistema dodamo stolpec desnih strani in dobimo razširjeno matriko sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & -6 & -2 & 14 \end{array}\right]$$

Namesto na enačbah izvajamo elementarne transformacije na vrsticah te 2×4 matrike.

Splošno lahko sistem $Ax = b$ nadomestimo z RAZŠIRJENO MATRIKO SISTEMA, to je matriko sistema, ki smo ji za črtkano črto dodali stolpec desnih strani:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

ELEMENTARNE VRSTIČNE TRANSFORMACIJE na (razširjeni) matriki:

I. Pomnožimo eno od vrstic s skalarjem in jo prištejemo drugi vrstici.

II. Pomnožimo eno od vrstic z neničelnim skalarjem.

III. Zamenjamo dve vrstici.

Definirajmo: NIČELNA VRSTICA je sestavljena iz samih ničel. NIČELNI STOLPEC je sestavljen iz samih ničel. Najbolj levi neničelni element v vsaki vrstici je PIVOT.

GAUSSOVA ELIMINACIJA je algoritem, pri katerem z elementarnimi vrstičnimi operacijami sistem predelamo v STOPNIČASTO OBLIKO, za katero je značilno:

Ničelne vrstice so pod neničelnimi.
Vsi pivoti so enaki 1.
Pivot vrstice je strogo desno od pivota vrstice nad njim.

V prejšnjem primeru smo sistem predelali v stopničasto obliko:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} (x+2y=-4) \\ (z=-1) \end{array}$$

Obkrožena sta pivota.

GAUSSOVA ELIMINACIJA na matriki poteka takole. Če je matrika ničelna, je že v stopničasti obliki. Sicer poiščemo prvi stolpec z leve, ki je neničeln. Denimo, da je to k-ti stolpec:

$$\left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ 0 & a_{ik} \neq 0 \\ & \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} & a_{ik} \\ 0 & \\ & \end{array}\right] \quad / a_{ik}$$

Če je potrebno,
z zamenjavami vrstic dosežemo, da je na mestu $(1,k)$ neničeln element. Pomnožimo prvo vrstico s primernim številom, tako da je na mestu $(1,k)$ enica:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline & \tilde{a}_{2k} & \\ 0 & \tilde{a}_{3k} & \\ & \vdots & \\ & \tilde{a}_{mk} & \end{array}\right]$$

Če je $\tilde{a}_{2k} \neq 0$, pomnožimo prvo vrstico z $(-\tilde{a}_{2k})$, prištejemo drugi. Tako pridelamo ničle pod obkroženim pivotom in dobimo matriko:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline 0 & 0 & A_1 \end{array}\right]$$

Zdaj enak algoritem uporabimo na matriki A_1 itd. ...

Ko razširjeno matriko sistema spravimo v stopničasto obliko, se lahko zgodi, da je zadnja neničelna vrstica takale:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_r \end{array}\right]$$

kjer je $\tilde{b}_r \neq 0$. To je enakovredno enačbi

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = \tilde{b}_r \neq 0,$$

kar seveda ni mogoče. V tem primeru je sistem nerešljiv (protisloven).

Če temu ni tako, z elementarnimi vrstičnimi operacijami tipa I pridelamo še ničle nad pivoti. Začnemo spodaj desno. Tako dobimo VRSTIČNO KANONIČNO FORMO, iz katere še laže ugotovimo rešitev oziroma rešitve sistema.
Vrstična kanonična forma je stopničasta forma, v kateri so nad pivoti ničle.

PRIMER: Določimo presek ravnin:

$$2x - 4y + 6z = 3$$
$$-3x + 6y - 9z = -4$$

Ustrezna razširjena matrika je

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & -9 & -4 \end{array}\right]$$

Delimo prvo vrstico z 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & \frac{3}{2} \\ -3 & 6 & -9 & -4 \end{array}\right]$$

Pomnožimo prvo vrstico s 3, prištejemo k drugi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Sistem ni rešljiv. Ravnini sta vzporedni (obe imata normalo $(1,-2,3)$), a različni.

Primer: Rešimo sistem treh enačb s pet neznankami:

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 8$$
$$2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 12x_4 + 17x_5 = 15$$
$$3x_1 + 9x_2 + 17x_3 + 25x_4 + 30x_5 = 27.$$

V matrični obliki ta sistem zapišemo krajše:

PIVOT →
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 6 & 9 & 12 & 17 & 15 \\ 3 & 9 & 17 & 25 & 30 & 27 \end{array}\right].$$

Pridelamo ničle pod 1 v prvem stolpcu. Pomnožimo prvo vrstico z (-2), prištejemo drugi. Pomnožimo prvo vrstico z (-3), prištejemo tretji:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Pomnožimo drugo vrstico z -1, da se začne neničelni del vrstice z 1:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Pridelamo ničlo pod obkroženo enko. Pomnožimo drugo vrstico z (-2), prištejemo tretji vrstici:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Lahko se ustavimo in iz zadnje enačbe ugotovimo $x_5 = 1$. Nesemo v drugo enačbo itd.

Bolje je, da matriko spravimo v <u>vrstično kanonično formo</u>, tako da pridelamo ničle nad obkroženimi enkami (pivoti). Zadnjo vrstico pomnožimo z (-1), prištejemo drugi. Zadnjo vrstico pomnožimo z (-9), prištejemo prvi:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Pridelamo ničlo nad obkroženo enko. Pomnožimo drugo vrstico z (-5), prištejemo prvi in dobimo <u>vrstično kanonično formo</u>:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{(Obkroženi so pivoti.)}$$

Zadnja vrstica pomeni: $x_5 = 1$. Predzadnja:

$$x_3 + 2x_4 = 0, \text{ se pravi } x_3 = -2x_4.$$

Prva vrstica:

$$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = -1, \text{ se pravi } x_1 = -1 - 3x_2 + 3x_4.$$

Povzemimo: sistem je rešljiv. Množica rešitev je takale:

$$\underline{\underline{x_1 = -1 - 3x_2 + 3x_4, \quad x_3 = -2x_4, \quad x_5 = 1.}}$$

Neznanki x_2, x_4 lahko izberemo <u>poljubno</u>. Potem pa sta x_1, x_3 določeni z x_2, x_4. Rešitev lahko preverimo – postavimo v vse tri enačbe.

Drug pogled je takle. Vektor rešitev je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 + 3x_4 - 1 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Tu sta <u>x_2, x_4 poljubna</u>. Zato je rešitev <u>neskončno</u>.

Matematik pravi, da sta x_2, x_4 PARAMETRA. Ker sta poljubna, lahko zanju uporabimo tudi kako drugo črko. Množica rešitev je torej dvoparametrična družina.

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}3\\0\\-2\\1\\0\end{bmatrix} \qquad (s, w \in \mathbb{R}).$$

Ti sta s, w parametra.

Če izberemo vrednosti za s in w, dobimo PARTIKULARNO (pose
REŠITEV naše enačbe. Za $s=0, w=0$ je to recimo $x_1=-1, x_2=x_3=x_4=0, x_5=1$. Za $s=1, w=0$ je to $x_1=-4, x_2=1, x_3=x_4=0, x_5=1$ itd.

Če imamo rešljiv sistem v vrstični kanonični formi in imamo pivot v r-tem stolpcu, je spremenljivka x_r glavna. Spremenljivke, ki niso glavne, so proste. (V prejšnjem primeru sta bili x_2, x_4 prosti neznanki.) Iz kanonične forme lahko glavne neznanke izrazimo s prostimi. Če ni prostih spremenljivk, ima sistem eno samo rešitev.

PRIMER: Rešimo sistem

$$\begin{aligned} 5y - 2z &= 9 \\ 2x - 4y + 6z &= -7 \\ x - y + 8z &= 1 \end{aligned}$$

Zamenjamo prvo in tretjo enačbo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & -7 \\ 0 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right] \quad (-2)$$

Pridelamo ničlo pod obkroženim pivotom:

$$-\frac{1}{2}\cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & -10 & -9 \\ 0 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & \frac{9}{2} \\ 0 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right] (-5) \longrightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -27 & -\frac{27}{2} \end{array}\right] -\frac{1}{27} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{pridelamo ničle nad obkr. pivotom}}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Tu ni prostih spremenljivk. Iz prve enačbe: $x = 1$, iz druge $y = 2$, iz tretje $z = \frac{1}{2}$. Edina rešitev je torej

$x = 1,\ y = 2,\ z = \frac{1}{2}$.