7. SISTEMI LINEARNIH ENAČB - PONOVNO

Imejmo sistem m enačb z n neznankami:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

Če pišemo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

je to sistem enak:

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad (2).$$

Sistem (1) lahko predstavimo tudi takole:

$$x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{\vec{a}_2} + \dots + x_n \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\vec{a}_n} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ je rešljiv (kompatibilen) natanko takrat, ko je stolpec $\vec{b}$ desnih strani linearna kombinacija stolpcev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ matrike A, se pravi, da je $\vec{b} \in \mathrm{Lin}\{\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n\} = \mathrm{im}\, A$. To pa je natanko takrat, ko je $\mathrm{Lin}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathrm{Lin}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}\}$. Ker je $\dim(\mathrm{Lin}\{\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n\}) = \mathrm{rang}\, A$, vidimo:

Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ je rešljiv natanko takrat, ko je rang matrike A enak rangu razširjene matrike $[A \,\vdots\, \vec{b}]$.

HOMOGENI sistem $A\vec{x} = 0$ ima vsaj rešitev.

Množica vseh rešitev sistema $A\vec{x} = 0$ je linearni podprostor $\mathrm{Ker}\, A$, ki vsebuje vsaj $\{0\}$. Bri ko je $\mathrm{Ker}\, A \neq \{0\}$, je $\mathrm{Ker}\, A$ vsaj enorazsežno in tako vsebuje neskončno rešitev sistema.

Naj bo sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ rešljiv in $\vec{w}$ neka konkretna (PARTIKULARNA) rešitev: $A\vec{w} = \vec{b}$. Če je $\vec{x}$ poljubna rešitev: $A\vec{x} = \vec{b}$ in $\vec{y} = \vec{x} - \vec{w}$, je $A\vec{y} = A(\vec{x} - \vec{w}) = A\vec{x} - A\vec{w} = \vec{b} - \vec{b} = 0$. Torej je $\vec{y} \in \ker A$ in $x = \vec{w} + \vec{y}$, kjer je $y \in \ker A$.

Če je $\vec{z} \in \ker A$, je $A(\vec{z} + \vec{w}) = A\vec{z} + A\vec{w} = 0 + \vec{b} = \vec{b}$, torej je $z + \vec{w}$ rešitev. Vidimo:

Če je $\vec{w}$ neka partikularna rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, je množica vseh rešitev enaka

$$\vec{w} + \ker A = \{\vec{w} + \vec{y} ; \vec{y} \in \ker A\}.$$

Množico $\vec{w} + \ker A$ dobimo torej, da linearni podprostor $\ker A$ vzporedno premaknemo za vektor $\vec{w}$.

Primer: Množica rešitev homogene enačbe

$$2x + y + 3z = 0$$

je dvorazsežen linearen podprostor v $\mathbb{R}^3$, in sicer ravnina Y skozi izhodišče.

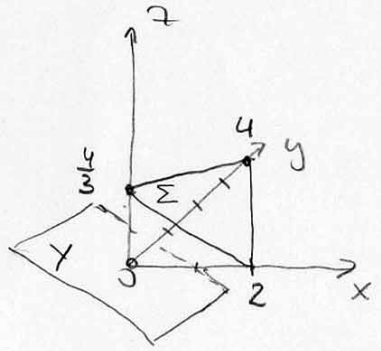
Množica rešitev nehomogene enačbe

$$2x + y + 3z = 4$$

je ravnina Σ. Ker je $\vec{r}_0 = (2,0,0)$ ena od rešitev, je

$$\Sigma = (2,0,0) + Y,$$

se pravi podprostor Y, vzporedno premaknjen za vektor $(2,0,0)$ (slika 1).



Vrnimo se k homogenemu sistemu

$$A\vec{x} = 0,$$

kjer je A $m \times n$ matrika. Potem $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Zato je

$$n = \dim(\mathbb{K}^n) = \dim(\ker A) + \operatorname{rang} A.$$

Torej velja:

$$\underline{\dim(\ker A) + \operatorname{rang} A = \text{število neznank}.}$$

(= število stolpcev v A)

Primera:

1. V prejšnjem primeru ($2x + y + 3z = 0$) je število neznank 3, $A = [2, 1, 3]$ ta ima rang 1, zato je $\dim(\ker A) = \dim Y = 2$.

2. Vzemimo sistem

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0. \end{aligned}$$

Vrstici sta linearno neodvisni, zato je rang matrike sistema enak 2. Ker imamo 3 neznanke, je $\dim(\ker A) = 3 - 2 = 1$. Torej je $\ker A$, ki je množica rešitev sistema, enorazsežen podprostor v $\mathbb{R}^3$, torej premica skozi 0 v $\mathbb{R}^3$. Napravimo Gaussov eliminacijski postopek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Torej je $y - \frac{3}{7}z = 0$ in $x - \frac{1}{7}z = 0$, se pravi $(x, y, z) = (\frac{1}{7}z, \frac{3}{7}z, z) = \frac{z}{7}(1, 3, 7)$. Množica rešitev je torej premica $\underline{\underline{(x, y, z) = t(1, 3, 7);\ t \in \mathbb{R}}}$.

NALOGE

1. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -6 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Določi množico Y rešitev sistema $A\vec{x} = 0$ $(\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$ in dim Y.

b) Za kakšne a je rešljiv sistem $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ a \end{bmatrix}$

in kaj je (geometrijsko) množica rešitev sistema v tem primeru?

2. Določi (glede na število a) razsežnost prostora rešitev sistema

$$x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0$$
$$x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 4x_4 = 0$$
$$4x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$$
$$3x_1 + ax_2 + x_3 + 2x_4 = 0.$$

3. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Določi razsežnost množice rešitev sistema $A\vec{x} = 0$.

b) Reši sistem $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$. Kolikšna je rešitev?