3 SKALARNI PRODUKT

Vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ nanesimo tako, da se začenjata v isti točki. Če sta neničelna, lahko govorimo o kotu med njima. Znotraj vzamemo manjši kot (tako da je med 0 in π). Če sta $\vec{a}, \vec{b}$ na isti premici, je kot 0, če kažeta v isto smer, in π, ce kažeta v nasprotno smer.

Def. SKALARNI PRODUKT vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je definiran z

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ab\cos\varphi},$$

kjer je φ kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Če je $\vec{a}$ ali $\vec{b}$ enak 0, nagla $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Očitno je

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2}$$

Velja še:

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (m\vec{a})\cdot\vec{b} \qquad (m \text{ skalar}).$$

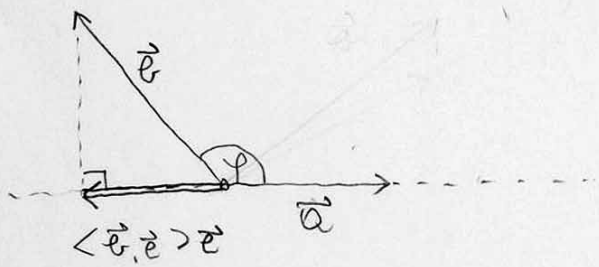
Za vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravimo, da sta PRAVOKOTNA ali ORTOGONALNA, če je $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Vektor 0 je pravokoten na vsak vektor: $0 \perp \vec{a}$ za vsak $\vec{a}$.

Naj bo $\vec{a} \neq 0$ in $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{a}$ enotski vektor v smeri vektorja $\vec{a}$.

PRAVOKOTNA PROJEKCIJA VEKTORJA $\vec{b}$ NA SMER VEKTORJA $\vec{a}$ je

$$\boxed{\langle \vec{b}, \vec{e} \rangle \vec{e}}.$$

Slika 1



To je pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na premico, ki vsebuje $\vec{a}$. Dokaz (slika 1):

$$\langle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{e} \rangle \vec{e}, \vec{e} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{e} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{e} \rangle \underbrace{\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle}_{1} = 0.$$

PRIMER iz fizike: Če sila $\vec{F}$ povzroči premik za vektor $\vec{s}$, opravi delo

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Naj bo φ kot med neničelnima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Potem je

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}.}$$

in od tod lahko izračunamo φ.

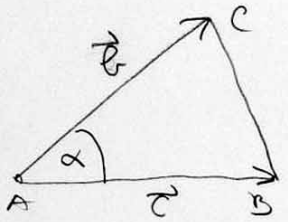
PRIMER: Za vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ velja:

$$\langle \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} \rangle = 0.$$

Kaj lahko sklepamo od tod?

Vsekakor je $0 = \langle \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{0} - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle =$
$= a^2 - b^2$. Ker sta $a, b \geq 0$, je $a = b$. Vektorja a, b sta torej enako dolga. Premisli, zakaj od tod sledi: da sta diagonali v paralelogramu pravokotni, je ta paralelogram romb.

PRIMER: V trikotniku ABC poznamo $|AB| = c$, $|AC| = b$ in kot CAB $(= \alpha)$. Na sliki 2 označimo $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{AC} = \vec{b}$.



Slika 2

Potem je $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{b} - \vec{c}$ in torej

$$a^2 = |BC|^2 = \langle \vec{b}-\vec{c}, \vec{b}-\vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - 2\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle =$$
$$= b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2.$$

Izpeljali smo KOSINUSNI IZREK v trikotniku.

Vzemimo pravokotni koordinatni sistem v prostoru.

Enotski vektor na osi x označimo z $\vec{i}$, enotski vektor na osi y z $\vec{j}$, enotski vektor na osi z s $\vec{k}$. Vektorji $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ so PAROMA PRAVOKOTNI (poljubna dva sta med seboj pravokotna):

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

Ker so tudi normirani:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1,$$

sestavljajo (standardno) ORTONORMIRANO BAZO PROSTORA.

(Privzamemo si, da $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sestavljajo desno trojico: levo se postavimo v vzhodišče tako, da nam glava kaže v smeri vektorja $\vec{k}$, desna roka v smeri vektorja $\vec{i}$, leva roka v smeri vektorja $\vec{j}$.)

Če je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, pišemo kratko

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = [a_1, a_2, a_3]$$

ali

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Naj bo še $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Potem je

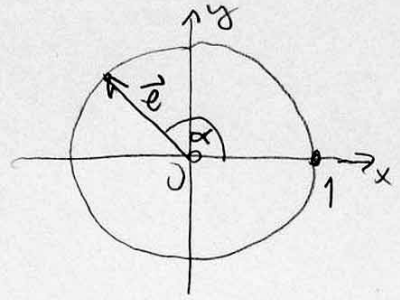
$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.}$$

Posebej je

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ \text{in} \quad \|\vec{a}\| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \end{aligned}}$$

Če se omejimo na vektorje v ravnini xy, pišemo namesto $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ kratko $\vec{a} = (a_1, a_2) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$.

Naj bo $\vec{e}$ enotski vektor v ravnini xy. Narišimo ga tako, da ima začetek v O. Konec vektorja $\vec{e}$ je potem na enotski krožnici (slika 3).

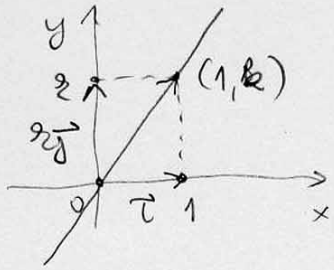


Slika 3

Če $\vec{e}$ oklepa kot α s pozitivnim delom osi x, je $\vec{e} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}$, zato

$$\boxed{\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha).}$$

PRIMER: V ravnini xy dobimo enotski vektor na premici z enačbo $y = kx$.



Slika 4: Če je $x = 1$, je $y = k$.

Kot vidimo na sliki 4, je $\vec{i} + k\vec{j} = (1,k)$ vektor na dani premici. Ker je $\|(1,k)\| = \sqrt{1+k^2}$, je ustrezni enotski vektor enak

$$\vec{e} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(1,k).$$

Seveda je $\vec{e}$ tudi enotski vektor na premici z enačbo $y = kx + n$.

PRIMER: Ali sta kolinearna vektorja:

a) $\vec{a} = (6,-3,3)$ in $\vec{b} = (-2,1,-1)$.

b) $\vec{c} = (3,9,-4)$ in $\vec{d} = (2,6,-3)$?

Rešitev: a) Najti moramo m, da bo $m\vec{b} = (-2m, m, -m) = \vec{a} = (6,-3,3)$. Primerjamo drugi koordinati: $m = -3$. Res je $-3\vec{b} = (6,-3,3) = \vec{a}$. Zato sta $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearna.

b) Če naj bi veljalo $m(2,6,-3) = (2m, 6m, -3m) = (3,9,-4)$, bi od tod dobili s primerjanjem prvih koordinat: $2m = 3$ in $m = \frac{3}{2}$. Toda $\frac{3}{2}(2,6,-3) = (3, 9, -\frac{9}{2}) \neq (3,9,-4)$. Vektorja $\vec{c}, \vec{d}$ nista kolinearna.

PRIMER: Dobimo kot med vektorjema:

a) $\vec{a} = (1,0,-1)$ in $\vec{b} = (2,7,2)$;

b) $\vec{c} = (1,-2,2)$ in $\vec{d} = (4,3,-5)$.

Rešitev: a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + (-1) 2 = 0$, zato sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna.

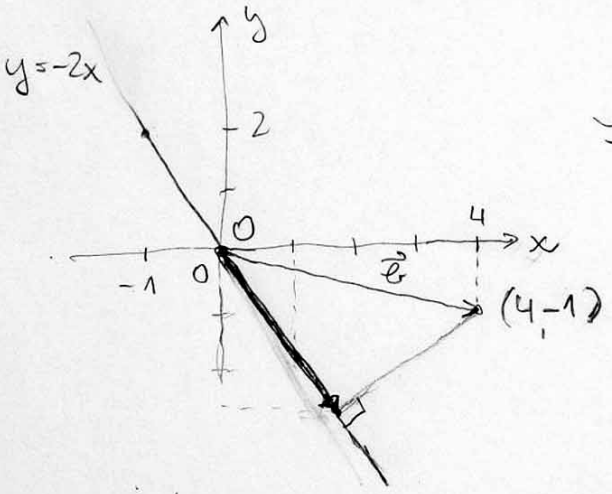
b) $\langle \vec{c}, \vec{d} \rangle = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + 2(-5) = -12$,

$\|\vec{c}\| = \sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2} = 3$, $\|\vec{d}\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Torej je $\cos\varphi = \dfrac{\langle \vec{c}, \vec{d} \rangle}{cd} = \dfrac{-12}{3 \cdot 5\sqrt{2}} = -\dfrac{4}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Od tod je $\varphi = \arccos\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) \approx 124{,}45^\circ \approx 2{,}1721$ radiana.

PRIMER: Dobimo pravokotno projekcijo vektorja $\vec{b} = (4, -1)$ na premico $y = -2x$ v ravnini xy.



Slika 5

Kot vemo, je vektor na naši premici enak $(1, -2)$ in ustrezni enotski vektor $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$.

Iskana projekcija je

$$\langle \vec{b}, \vec{e} \rangle \vec{e} = \left\langle (4, -1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(4 \cdot 1 + (-1)(-2)\right)(1, -2) = \frac{1}{5} \cdot 6 \cdot (1, -2) = \underline{\underline{\left(\frac{6}{5}, -\frac{12}{5}\right)}}.$$

PRIMER: V ravnini xy določimo enotski vektor, pravokoten na vektor $(3,4)$.

Rešitev: Najdi (x,y) vektor, pravokoten na $(3,4)$. Potem je

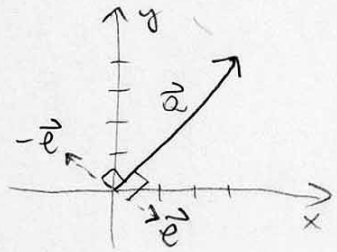
$$0 = \langle (x,y),(3,4)\rangle = 3x+4y.$$

Torej je $y = -\frac{3}{4}x$. Če je recimo $x=4$, je $y=-3$. Torej je $(4,-3) \perp (3,4)$. Enotski vektor v smeri vektorja $(4,-3)$ je

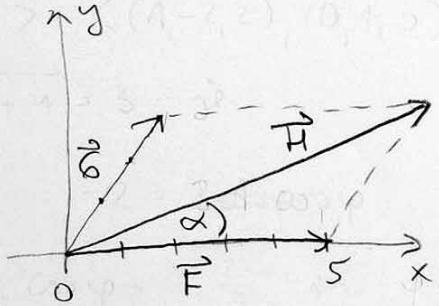
$$\vec{e} = \frac{(4,-3)}{\|(4,-3)\|} = \frac{(4,-3)}{5} = \underline{\underline{\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)}}.$$

Vektorja $\underline{\underline{\vec{e},-\vec{e}}}$ sta enotska in pravokotna na $(3,4)$. To sta edini rešitvi naloge (slika 6):

Slika 6



PRIMER: Sila $\vec{F}$ ima velikost 50N, sila $\vec{G}$ ima velikost 30N, oklepata pa kot 60°. Določimo velikost vsote $\vec{H}$ obeh sil in kot, ki ga $\vec{H}$ oklepa z $\vec{F}$.



Slika 7

Na sliki 7 smo postavili pravokotni koordinatni sistem, tako da je (v N) $\vec{F} = (50,0)$. Potem je

$$\vec{G} = (30\cos 60^\circ, 30\sin 60^\circ) = \left(30\cdot\frac{1}{2}, 30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (15, 15\sqrt{3}).$$

Torej je $\vec{H} = \vec{F}+\vec{G} = (65, 15\sqrt{3})$ in od tod

$$H = \sqrt{65^2+3\cdot 15^2}\,N = \underline{\underline{70\,N}}.$$

Sevedaje $\cos\alpha = \frac{H_1}{H} = \frac{65}{70} = \frac{13}{14}$ im od tod

$\alpha = \arccos\left(\frac{13}{14}\right) \approx 21{,}787^\circ$.