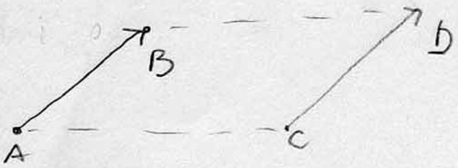
1. VEKTORJI V TRIRAZSEŽNEM PROSTORU

<u>Def.</u> Vsak <u>urejen par točk</u> (ali <u>usmerjena daljica</u>) v prostoru določa GEOMETRIJSKI VEKTOR. Vektor, ki pripada paru (A,B), označimo z $\overrightarrow{AB}$ in narišemo kot puščico, ki se začne v A in konča v B (slika 1):

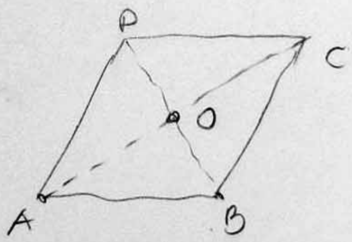
Slika 1:



Pri tem je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ natanko takrat, ko sta usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ <u>enako dolgi, vzporedni in kažeta v isto smer.</u> Na sliki 1 je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, zato je štirikotnik $ACDB$ paralelogram.

Usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ pravimo <u>predstavnik</u> vektorja $\overrightarrow{AB}$. Vsak vektor ima neskončno predstavnikov - toliko, kot je točk v prostoru. Površno rečeno rečemo, da je vektor vsaka usmerjena daljica v prostoru.

<u>Primer 1</u>: Naj bo $ABCD$ paralelogram in O presečišče njegovih diagonal. Iz točk A, B, C, D, O sestavimo vse mogoče urejene pare. Poglejmo, kateri pari določajo enake vektorje:



Slika 2

Vsekakor je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

Ker O razpolavlja diagonali, je $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$.

Prav tako je $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ in $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.

Vektorje bomo označevali s črkami; da jih bomo ločevali od števil (številom večkrat rečemo *skalarji*), bomo nad ustrezni simbol navajali puščico, recimo

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}.$$

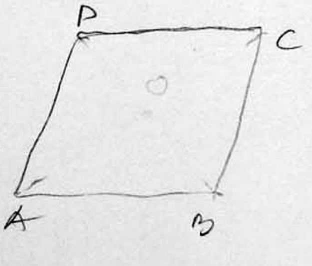
Urejeni par (A, A) določa vektor 0, katerega začetna in končna točka sovpadata:

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0.$$

(Po dogovoru nad ničelnim vektorjem navadno ne pišemo puščice.)
Vektor $\overrightarrow{BA}$ je *nasprotni vektor* k $\overrightarrow{AB}$, kar pišemo takole:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

Primer 2: Spet naj bo ABCD paralelogram, in O presečišče njegovih diagonal. Poglejmo, kateri urejeni pari točk iz množice $\{A, B, C, D, O\}$ predstavljajo nasprotne vektorje (slika 3).

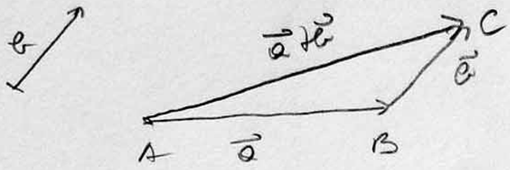


Slika 3

Tu je
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{CD},$$
$$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{CB},$$
$$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA},$$
$$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DB} \text{ itd.}$$

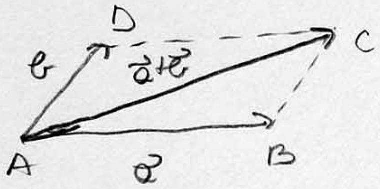
VSOTA in RAZLIKA VEKTORJEV

Imamo vektorja $\vec{a}, \vec{b}$. Naj bo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Predstavimo vektor $\vec{b}$ z daljico $\overrightarrow{BC}$ („prenesemo" ga „premaknemo", da začne v C).
Potem je vsota vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ določena z $\overrightarrow{AC}$ (slika 1).



Slika 1.

Lahko pa $\vec{a}$ in $\vec{b}$ predstavimo z usmerjenima daljicama z isto začetno točko. Nanju napnimo paralelogram (slika 2).



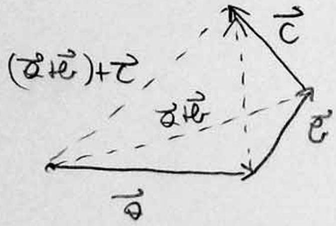
Slika 2

Vsota $\vec{a}+\vec{b}$ je vektor, določen z diagonalo paralelograma, usmerjeno iz skupne začetne točke obeh vektorjev. Velja:

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$$
$$\vec{a}+0 = \vec{a}$$
$$\vec{a}+(-\vec{a}) = 0 .$$

Če imamo tri vektorje: $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$, je (slika 3)

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$



Slika 3

Vektorje torej lahko seštevamo v poljubnem vrstnem redu.

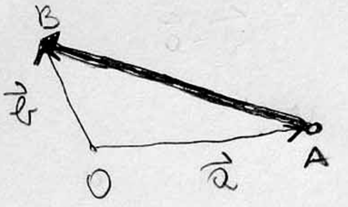
Kot običajno je **razlika** $\vec{b}-\vec{a}$ dveh vektorjev tak vektor, ki ga je treba prišteti vektorju $\vec{a}$, da dobimo $\vec{b}$. Torej

$$\boxed{(\vec{b}-\vec{a})+\vec{a}=\vec{b}}$$

Prištejmo na obeh straneh $-\vec{a}$:

$$\boxed{\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})}$$

Če je $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ in $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, je $\quad \vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$ (skica 4).



Skica 4: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

NORMA VEKTORJA

Vsakemu vektorju $\vec{a}$ pripada **DOLŽINA** ali **NORMA**, ki jo označimo z

$$\|\vec{a}\|=|\vec{a}|=a \ .$$

Velja:

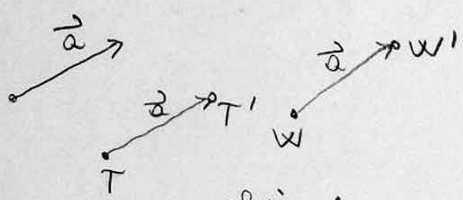
$$\|\vec{a}+\vec{b}\|\leq\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\| \ .$$

Vektor z dolžino 1 imenujemo **ENOTSKI** vektor ali **NORMIRANI** vektor.

VZPOREDNI PREMIK

VZPOREDNI PREMIK ali **TRANSLACIJA ZA VEKTOR** $\vec{a}$ je preslikava prostora nase, ki vsaki točki T priredi tako točko T', da je

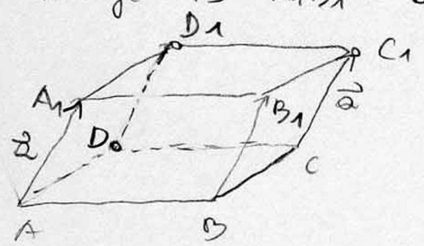
$$\overrightarrow{TT'}=\vec{a} \qquad \text{(skica 1)}$$



Skica 1

Vzporedni premik preslika daljico na enako dolgo vzporedno daljico, premico na vzporedno premico in ravnino na vzporedno ravnino.

Vzemimo paralelogram ABCD in vektor $\vec{a}$, ki ni vzporeden ravnini paralelograma. Naj bo $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1} = \vec{a}$.
Potem so točke $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ oglišča PARALELEPIPEDA (= prizme, katere osnovna ploskev je paralelogram). Paralelograma $ABCD$ in $A_1B_1C_1D_1$ sta osnovni ploskvi, stranski robovi so AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Paralelogram $A_1B_1C_1D_1$ dobimo iz ABCD z vzporednim premikom za vektor $\vec{a}$. Zato je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D_1C_1}$ itd.



Slika 2: Paralelepiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Primer: Imamo paralelepiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Poenostavimo vsote:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC_1}$.
Ker je $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, je vsota enaka $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{A_1A}$
Ker je $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1C_1}$, je $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{C_1B_1} = 0$.
Torej je naša vsota enaka $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$.

3) $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{AB}$.

4) $\overrightarrow{AC_1} + \underset{\overrightarrow{C_1B}}{\underset{\parallel}{\overrightarrow{D_1A}}} + \underbrace{\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{D_1D}}_{\overrightarrow{BD}} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

5) $\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{C_1C}$
Vsekakor je $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{C_1C} = 0$ in tako naša vsota enaka
$\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{D_1B}$.