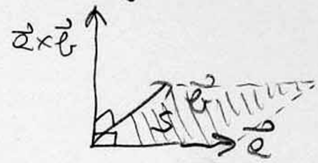
4. VEKTORSKI PRODUKT DVEH VEKTORJEV

Urejenemu paru $\vec{a}, \vec{b}$ vektorjev priredimo vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, ki mu pravimo <u>VEKTORSKI PRODUKT</u> vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je:

1) pravokoten na $\vec{a}$ in na $\vec{b}$;
2) njegova norma je ploščina paralelograma, napetega na $\vec{a}$ in $\vec{b}$;
3) (Če se $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ začne v skupni točki vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$) je gledano s konca vektorja $\vec{c}$, vrtenje po krajši poti iz $\vec{a}$ v $\vec{b}$ pozitivno.

Slika 1:



Iz točke 2 sledi:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = 0 \text{ natanko takrat, ko sta } \vec{a}, \vec{b} \text{ kolinearna}}$$

Tako je recimo $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ za vsak vektor $\vec{a}$.

Če je φ kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = ab \sin\varphi .$$

<u>Lastnosti vektorskega produkta</u>:

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} \\ (m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (m\vec{b}) \end{gathered}} \quad (m \text{ skalar}).$$

(Za $m > 0$ je to jasno. Sicer: $(-\vec{a}) \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{b}$.)

Težje je dokazati distributivnost:

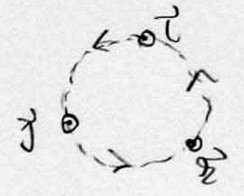
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{d}) \times \vec{b} = a \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{b}$$

Ker smo se omejili na desne pravokotne koordinatne sisteme, je

$$\boxed{\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}.}$$

Prav tako velja: $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ in $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$. Ti dve enakosti dobimo iz prvotne, če vektorje $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ CIKLIČNO zamenjamo:



Če je $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=(a_1,a_2,a_3)$ in $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, ob upoštevanju prej navedenih pravil izračunamo

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1).$$

Če je DETERMINANTA tipa 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc,$$ (a, b, c, d so števila)

in DETERMINANTA tipa 3×3:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

(tu so x_i, y_j, z_k števila), je

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Omenimo, da lahko determinanto 3×3 (in samo to) izračunamo takole:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_2 & z_3 \end{array}\right.$$

(Na desni smo pripisali prva dva stolpca.)

Seštejemo produkte po diagonalah, ki padajo od leve proti desni, odštejemo produkte po ostalih diagonalah, ki se dvigajo od leve proti desni.

Primer iz fizike: Če se delec z nabojem e giblje s hitrostjo $\vec{v}$ po magnetnem polju z gostoto $\vec{B}$, nanj deluje sila

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} .$$

Primer: Določimo enotski vektor, pravokoten na vektorja $\vec{a} = (1,0,1)$ in $\vec{b} = (1,2,0)$.

Rešitev: Ta vektor je vzporeden vektorju

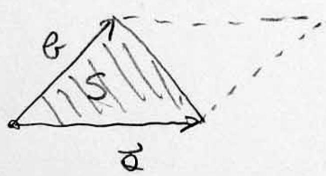
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 1, 2) .$$

Ker je $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$, je iskani enotski vektor

$$\underline{\underline{\vec{e} = \pm \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)}} .$$

Primer: Ploščina trikotnika, napetega na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ (slika 2) je

$$S = \frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\| .$$



Slika 2