II. VEKTORSKI PROSTORI

1. PROSTORA $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$

Trojica (x_1, x_2, x_3) realnih števil nam pomeni obenem točko in vektor v $\mathbb{R}^3$. Vektorski račun v $\mathbb{R}^3$ bi lahko vpeljali brez nazorne predstave – le kot operacije med trojicami števil. To nam omogoča prenesti vektorski račun tudi v prostor $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (kartezični produkt n kopij polja $\mathbb{R}$). Množica $\mathbb{R}^n$ je množica funkcij

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbb{R}.$$

Če označimo $f(1) = f_1, \dots, f(n) = f_n$, dobimo UREJENO n-TERICO $(f_1, f_2, \dots, f_n)$. Seveda je f enolično določena z $f(1), \dots, f(n)$, tako da lahko f identificiramo z urejeno n-terico.

$$(f(1), \dots, f(n)) = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Na množici funkcij $f, g : \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbb{R}$ lahko definiramo seštevanje in množenje z realnim številom t kot običajno:

$$(f+g)(i) = f(i) + g(i)$$

$$(tf)(i) = tf(i)$$

za $i = 1, 2, \dots, n$. Definiramo lahko tudi SKALARNI PRODUKT:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(i) g(i).$$

Od zdaj naprej bomo elemente v $\mathbb{R}^n$ obravnavali kot urejene n-terice realnih števil: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, kjer so $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Velja:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

natanko takrat, ko je $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2, \dots, a_n = c_n$.

Urejeni n-terici $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ rečemo TOČKA ali (ALGEBRSKI) VEKTOR v $\mathbb{R}^n$. Kot rečeno, je VSOTA vektorjev $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektor

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

NIČELNI VEKTOR je $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

PRODUKT VEKTORJA $\vec{a}$ S SKALARJEM t je vektor

$$t\vec{a} = (ta_1, ta_2, \dots, ta_n)$$

NASPROTNI VEKTOR k vektorju $\vec{a}$ je vektor

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

Zelo lahko preverimo, da za tako definirano vsoto in produkt s skalarjem veljajo enaka pravila kot v $\mathbb{R}^3$.

SKALARNI PRODUKT vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je število

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .}$$

Tudi za skalarni produkt veljajo enake lastnosti kot v $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0}$$

Iz $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ sledi $\vec{a} = 0$. Skalarni produkt v $\mathbb{R}^n$ je komutativen in distributiven:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

$$\langle \vec{a} + \vec{c}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle$$

za vse $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$. Za $t \in \mathbb{R}$ velja še:

$$\langle t\vec{a}, \vec{b} \rangle = t \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, t\vec{b} \rangle .$$

(EVKLIDSKA) NORMA (DOLŽINA) vektorja $\vec{a}$ je

$$\boxed{\|\vec{a}\| = +\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq 0}$$

Iz $\|\vec{a}\| = 0$ sledi $\vec{a} = 0$. Prav tako je za vse $t \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\|t\vec{a}\| = |t|\,\|\vec{a}\|.}$$

Malce teže je videti: NEENAKOST CAUCHY–SCHWARZ–BUNJAKOVSKI

$$\boxed{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|.}$$

(V $\mathbb{R}^3$, kjer je $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ab\cos\varphi$, je to posledica dejstva $|\cos\varphi| \leq 1$.)

Dokaz. Za vse $t \in \mathbb{R}$ je

$$\langle t\vec{a} + \vec{b}, t\vec{a} + \vec{b} \rangle = t^2 \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2t \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \geq 0.$$

Če za kvadratno funkcijo $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ velja $f(x) \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$, je diskriminanta $B^2 - 4AC \leq 0$. V našem primeru je $A = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2$, $B = 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $C = \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \|\vec{b}\|^2$.

Torej je

$$4\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = 4|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|^2 \leq 4\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2.$$

Ker je $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \geq 0$, je $\quad |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$. □

Od tod sledi TRIKOTNIŠKA NEENAKOST za normo:

$$\boxed{\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.}$$

Dokaz. $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \leq$

$$\leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2.$$

RAZDALJA med točkama $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je

$$\boxed{d(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{b} - \vec{a}\| = +\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}}$$

Seveda je $d(\vec{a}, \vec{b}) = d(\vec{b}, \vec{a}) \geq 0$, iz $d(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ sledi $\vec{a} = \vec{b}$, $d(\vec{a}, \vec{c}) \leq d(\vec{a}, \vec{b}) + d(\vec{b}, \vec{c})$ za vse $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Zadnja neenakost je posledica trikotniške neenakosti za normo:

$$\|\vec{c}-\vec{a}\| = \|(\vec{c}-\vec{b})+(\vec{b}-\vec{a})\| \leq \|\vec{c}-\vec{b}\| + \|\vec{b}-\vec{a}\| .$$

Vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ sta PRAVOKOTNA ali ORTOGONALNA, $\vec{a} \perp \vec{b}$, če je

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 .$$

Če sta $\vec{a}, \vec{b}$ pravokotna, velja PITAGOROV IZREK:

$$\boxed{\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \quad \text{za } \vec{a} \perp \vec{b} .}$$

Dokaz. $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2 \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{0} + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle .$ □

Vektor z normo 1 je ENOTSKI vektor ali NORMIRAN vektor. Enotski vektor v smeri vektorja $\vec{a}$ je

$$\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} .$$

PRIMER: Za $b > 0$ je množica $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; d(\vec{x}, \vec{a}) \leq b\} =$

$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x}-\vec{a}\| \leq b\}$ ZAPRTA KROGLA s polmerom b in s središčem v $\vec{a}$.

Zaprta krogla s polmerom 1 v $\mathbb{R}^4$ in s središčem v 0 je množica vseh točk (x_1, x_2, x_3, x_4), da je

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1 .$$

Točka $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ je vsebovana v tej krogli: norma te točke je 1. Torej je vektor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ enotski vektor.

Za $n > 3$ naša prostorska predstava ne deluje več. Vseeno lahko definiramo:

Če sta $\vec{r}_0$ in $\vec{a} \neq 0$ vektorja v $\mathbb{R}^n$, je množica točk

$$\boxed{\{\vec{r}_0 + t\vec{a}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}}$$

PREMICA v $\mathbb{R}^n$. Število t je parameter in to je parametrična enačba premice.

Če je $\vec{n}$ neničeln vektor v $\mathbb{R}^n$ in $d \in \mathbb{R}$, je

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n\ ;\ \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = d\}$$

HIPERRAVNINA v $\mathbb{R}^n$ z normalo $\vec{n}$. Če je $\vec{n} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, je enačba te hiperravnine:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d.$$

Če sta $\vec{x}, \vec{y}$ različni točki v $\mathbb{R}^n$, je

$$\boxed{\{\vec{x} + \lambda(\vec{y} - \vec{x})\ ;\ \lambda \in [0,1]\} = \{(1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}\ ;\ \lambda \in [0,1]\}}$$

DALJICA med $\vec{x}$ in $\vec{y}$.

Množica $K \subset \mathbb{R}^n$ je KONVEKSNA, če za poljubna $\vec{x}, \vec{y} \in K$, $\vec{x} \neq \vec{y}$ velja, da je daljica od $\vec{x}$ do $\vec{y}$ tudi v K.

Pozneje bomo potrebovali tudi prostor $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ (kartezični produkt n kopij polja $\mathbb{C}$). Prostor $\mathbb{C}^n$ je sestavljen iz vseh urejenih n-teric kompleksnih števil:

$$\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \qquad (z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}).$$

Če je $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, je

$$\vec{z} + \vec{w} = (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n).$$

Za $\lambda \in \mathbb{C}$ je

$$\lambda\vec{z} = (\lambda z_1, \lambda z_2, \dots, \lambda z_n).$$

SKALARJI v $\mathbb{C}^n$ so torej kompleksna števila.

Za te operacije veljajo enake lastnosti kot v $\mathbb{R}^n$.

Nekoliko drugače pa je definiran SKALARNI PRODUKT:

$$\boxed{\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \dots + z_n \overline{w_n}}$$

kjer je $\overline{w_i}$ konjugirana vrednost števila w_i. V $\mathbb{C}^n$ skalarni produkt ni komutativen:

$$\boxed{\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle = \overline{\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle}}$$

Za $\lambda \in \mathbb{C}$ je

$$\langle \vec{z}, \lambda \vec{w} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$$

Še marsikaj pa velja:

$$\langle \lambda \vec{z}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle,$$

$$\langle \vec{z} + \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$\langle \vec{z}, \vec{w} + \vec{u} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{u} \rangle \quad \text{itd.}$$

Tako je

$$\boxed{\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \geq 0}$$

NORMA vektorja $\vec{z}$ je

$$\boxed{\|\vec{z}\| = +\sqrt{\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle} = +\sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} \geq 0}$$

in zanjo veljajo običajne lastnosti.

Konec 19. stoletja je italijanski matematik PEANO ugotovil, da lahko, če pozabimo skalarni produkt, stvari še bistveno bolj posplošimo. Vpeljal je pojem ABSTRAKTNEGA VEKTORSKEGA PROSTORA. Njegove ideje so prišle do izraza šele v 20. stoletju.

NALOGE:

1. Naj bo $\vec{a} = (1,-1,2,-3)$ in $\vec{b} = (0,-2,0,4)$. Določi:

a) $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-2\vec{b}$, $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$, $\langle 2\vec{a},-\vec{b}\rangle$.

b) Določi število x tako, da bo vektor $\vec{c} = (0,-2,x,4)$ pravokoten na $\vec{a}$.

c) Določi števili u, v, da bo vektor $\vec{d} = (-1,u,1,v)$ pravokoten na $\vec{a}$ in na $\vec{b}$.

2. Imamo vektorja $\vec{z} = (1+i, 1-i)$ in $\vec{w} = (-i, 4+3i)$ v $\mathbb{C}^2$. Določi:

a) $\vec{z}+\vec{w}$, $\vec{z}-i\vec{w}$, $\|\vec{z}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\langle \vec{z},\vec{w}\rangle$, $\langle \vec{z}, i\vec{w}\rangle$.

$1+2i$ b) Določi število λ, da bo vektor $(2-i, \lambda)$ pravokoten na $\vec{z}$.

* 3. Naj bosta $\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ taka, da je $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}-\vec{b}\|$. Določi $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$.

4. Določi presečišče premic v $\mathbb{R}^5$ z enačbama

$$\vec{r} = (3,1,2,1,3) + s(1,0,1,1,2) \quad (s\in\mathbb{R}),$$

$$\vec{r} = (3,0,4,2,6) + t(2,1,0,1,1) \quad (t\in\mathbb{R}).$$

5. Določi presečišče vsake od premic iz prejšnje naloge s hiperravnino $x_1 - 2x_2 + x_4 + 2x_5 = 14$.

6. Določi presek naslednjih štirih hiperravnin v $\mathbb{R}^4$:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\
5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= 5 \\
7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7
\end{aligned}
$$

7. Naj bo B zaprta krogla s polmerom $r > 0$ in s središčem v 0 v $\mathbb{R}^n$. Ali je B konveksna množica? Utemelji.

* 8. Ali je hiperravnina v $\mathbb{R}^n$ konveksna množica? Utemelji.

9. Premica p v $\mathbb{R}^5$ ima enačbo
$\vec{r} = (3,1,2,1,3) + s(1,0,1,1,2) \quad (s \in \mathbb{R})$.
Določi točke na p, ki so za $\sqrt{7}$ oddaljene od izhodišča.

2. VEKTORSKI PROSTOR

Naj bo $\mathbb{K}$ polje $\mathbb{R}$ realnih števil ali polje $\mathbb{C}$ kompleksnih števil.

Def. Množica X je VEKTORSKI PROSTOR (LINEAREN PROSTOR) NAD POLJEM SKALARJEV $\mathbb{K}$, če sta v njej definirana SEŠTEVANJE IN MNOŽENJE S SKALARJEM (skalarji so števila iz $\mathbb{K}$), da velja:

1) Vsota je komutativna in asociativna:

$$x+y=y+x \qquad (x,y,z\in X)$$
$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

Elementom množice X rečemo VEKTORJI.

2) Obstaja vektor 0 z lastnostjo $x+0=x$ za vsak x.

3) Za vsak vektor x obstaja NASPROTNI VEKTOR $-x$ z lastnostjo
$$x+(-x)=0.$$

Produkt s skalarjem vektorju $x\in X$ in skalarju $t\in\mathbb{K}$ priredi vektor $tx\in X$, da velja:

$$t(sx)=(ts)x$$
$$1x=x$$
$$t(x+y)=tx+ty \qquad (x,y\in X,\ s,t\in\mathbb{K}).$$
$$(t+s)x=tx+sx$$

Če so skalarji realna števila ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$), je to REALNI VEKTORSKI PROSTOR. Če so skalarji kompleksna števila ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$), je to KOMPLEKSNI VEKTORSKI PROSTOR.

PRIMERI: $\mathbb{R}^n$ je realen vektorski prostor;
$\mathbb{C}^n$ je kompleksen vektorski prostor.

Množica $M_{m,n}(\mathbb{K})=\mathbb{K}^{m\times n}$ je vektorski prostor za običajno seštevanje matrik in množenje matrik s skalarjem.

Naj bo $\mathbb{K}^A$ prostor vseh funkcij iz neprazne množice A v polje $\mathbb{K}$. Operaciji definiramo takole:

$$(f+g)(a) = f(a)+g(a)$$
$$(tf)(a) = tf(a) \qquad (a\in A,\ t\in \mathbb{K})$$

Element 0 je ničelna funkcija, ki je enaka 0 za vse $a\in A$.
Če je $A = \{1,\dots,n\}$, vemo, da je $\mathbb{K}^A = \mathbb{K}^n$.

LASTNOSTI VEKTORSKEGA PROSTORA

Naj bo X vektorski prostor. Za vsak $x\in X$ je

$$0x = 0$$
$$(-1)x = -x \ .$$

Velja še: $tx = 0$, če in samo če je $t=0$ ali $x=0$.

Dokaz. $\underset{\substack{\parallel \\ 1x = x}}{(1+0)x} = 1.x + 0.x = x + 0.x$

Torej je $x = x+0.x$. Prištejmo na obeh straneh $-x$, pa dobimo $0 = 0.x$.

Vzemimo $x\in X$. Potem je $x+0 = x$, zato $t(x+0) = tx + t.0 = tx$. Prištejmo na obeh straneh $(-tx)$, pa je $t0=0$.

Denimo, da je $tx = 0$ in $t\neq 0$. Potem obstaja t^{-1}, zato je $t^{-1}(tx) = x = t^{-1}0 = 0$.

Ker je $0 = 0.x = (1+(-1))x = x + (-1)x$, je $-x = (-1)x$. $\square$

Definirajmo še: $x-y = x+(-y)$.

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$.

Def. LINEARNA KOMBINACIJA vektorjev $x_1, x_2, \dots, x_n$ je vsak vektor

$$t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n,$$

kjer so $t_1, \dots, t_n$ skalarji. Taka kombinacija je TRIVIALNA, če so vsi t_i enaki 0, in NETRIVIALNA sicer (če je vsaj en t_i od 0 različen.)

Def. Neprazna podmnožica Y vektorskega prostora X je LINEAREN PODPROSTOR v X, če je Y ZAPRT za seštevanje in množenje s skalarjem, se pravi:

iz $y, z \in Y$ sledi $y+z \in Y$, (Kratko: $Y+Y \subseteq Y$).

če je t skalar, $y \in Y$, je $ty \in Y$. (Kratko: $\mathbb{K}Y \subseteq Y$)

Vsak linearen podprostor je sam zase vektorski prostor.
Vsak linearen podprostor vsebuje vektor 0 (ker je $0 \cdot y = 0$ za vsak $y \in Y$).
Vsaka linearna kombinacija vektorjev iz linearnega podprostora Y leži v Y.

TRIVIALNI PODPROSTOR je $\{0\}$.

Def. Naj bo M neprazna podmnožica vektorskega prostora X. Množica vseh mogočih linearnih kombinacij elementov iz M je linearni podprostor v X, ki ga imenujemo LINEARNA OGRINJAČA MNOŽICE M in označimo z $\mathrm{Lin}(M) = \mathrm{Span}(M)$. Velja: $\mathrm{Lin}(M)$ je najmanjši linearni podprostor v X, ki vsebuje M.

Če je Y linearna ogrinjača množice M, pravimo, da je M OGRODJE za Y. Pravimo tudi, da M razpenja Y. Od tod oznaka $Y = \mathrm{Span}(M)$.

Če je $x \neq 0$, je $\mathrm{Lin}(\{x\}) = \{tx;\ t \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}x$.

PRIMERI: 1. Če je $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq 0$, je $\mathrm{Lin}(\{\vec{x}\}) = \mathbb{R}\vec{x}$ premica skozi O, ki vsebuje točko $\vec{x}$.

2. Če sta $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ nekolinearna vektorja, je $\mathrm{Lin}(\{\vec{x}, \vec{y}\}) = \{t\vec{x} + s\vec{y};\ t, s \in \mathbb{R}\}$ ravnina skozi O, ki vsebuje točki $\vec{x}, \vec{y}$.

3. Če so $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ nekoplanarni vektorji, je $\mathrm{Lin}(\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}) = \mathbb{R}^3$.

4. Množica vseh $m \times n$ matrik, ki imajo prvi stolpec ničeln, je linearen podprostor v $M_{m \times n}$.

5. Množica vseh $n \times n$ zgornjih trikotnih matrik je linearen podprostor v M_n.

6. Množica vseh polinomov z realnimi koeficienti je linearen podprostor v prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vseh funkcij iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$.

7. Množica vseh polinomov stopnje $\leq n$ je linearen podprostor v prostoru vseh polinomov.

8. Množica vseh $n \times n$ simetričnih matrik je linearen podprostor v M_n.

Linearni podprostori v $\mathbb{R}^3$ so $\{0\}$, premice skozi 0, ravnine skozi 0, $\mathbb{R}^3$. Lahko preverimo še:

Če je Y linearen podprostor, je $\mathrm{Lin}(Y) = Y$.

Če je $M \subseteq P$, je $\mathrm{Lin}(M) \subseteq \mathrm{Lin}(P)$.

Množica M je ogrodje za Y, če je $\mathrm{Lin}(M) = Y$.

Presek dveh (ali več) podprostorov prostora X je spet linearen podprostor v X.

PRIMERI: **1.** Množica $M = \{(1,1,0), (2,1,0), (0,1,0)\}$ ni ogrodje za $\mathbb{R}^3$, saj vektorja $(0,0,1)$ ne moremo izraziti kot linearno kombinacijo vektorjev iz M. Sklepamo lahko tudi takole: Vsi vektorji iz M ležijo v ravnini xy, zato je $\mathrm{Lin}(M)$ vsebovana v tej ravnini. Točneje: $\mathrm{Lin}(M)$ je ravnina xy, saj sta recimo vektorja $(1,1,0)$ in $(0,1,0)$ nekolinearna in tako razpenjata ravnino xy. Pravzaprav je katerakoli dvojica vektorjev iz M ogrodje za ravnino xy.

2. Hiperravnina $Z = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$ ni linearen podprostor. Namreč: če je $\vec{x} \in Z$, potem recimo $2\vec{x} = (2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4) \notin Z$, saj je $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$.

3. Množica $Y = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = x_n\}$ je linearen podprostor v $\mathbb{R}^n$! To je hiperravnina, ki vsebuje 0.

NALOGE

1. Ali je množica vektorjev $\{(t, t);\ t \in \mathbb{R}\}$ linearen podprostor v $\mathbb{R}^2$? Nariši to množico.

2. Ali množica vektorjev $\{(x, 1-x);\ x \in \mathbb{R}\}$ vsebuje točko $(0, 0)$? Ali je ta množica linearen podprostor v $\mathbb{R}^2$? Nariši to množico.

3. Ali je množica vektorjev $\{(1, t);\ t \in \mathbb{R}\}$ linearen podprostor v $\mathbb{R}^2$? Nariši to množico.

4. Ali je množica vektorjev $\{(s, 0, t);\ s, t \in \mathbb{R}\}$ linearen podprostor v $\mathbb{R}^3$? Kako imenujemo to množico?

5. Ali je množica vektorjev $\{(x, -2x);\ x \in \mathbb{R}\}$ linearen podprostor v $\mathbb{R}^2$? Nariši to množico.

6. Ali je množica vektorjev $\{(x, y, 2x-3y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ linearen podprostor v $\mathbb{R}^3$? Kako imenujemo to množico?

* 7. SLED kvadratne matrike $A \in M_n$ je vsota diagonalnih elementov:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

(TRACE = SLED). Ali je $\{A \in M_n;\ tr(A) = 0\}$ linearen podprostor v M_n?

* 8. Ali je množica vseh 2×2 matrik z determinanto 0 linearen podprostor v M_2?

9. Naj bo $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$ neničeln vektor in $d \neq 0$. Ali je hiperravnina $Z = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = d\}$ linearen podprostor v $\mathbb{R}^n$? Ali je hiperravnina $H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = 0\}$ linearen podprostor v $\mathbb{R}^n$?

10. Naj bo X prostor vseh funkcij iz intervala $[a, b]$ v $\mathbb{R}$.

a) Naj bo $Y = \{f \in X ; f(a) = 0\}$. Ali je Y linearen podprostor v X?

b) Naj bo $Z = \{g \in X ; g(a) = g(b)\}$. Ali je Z linearen podprostor v X? Kaj je $Y \cap Z$?

c) Naj bo $W = \{f \in X ; f(\frac{a+b}{2}) = 1\}$. Ali je W linearen podprostor v X?