6. ZALOGA VREDNOSTI, JEDRO, RANG

Naj bo $A : X \to Y$ linearna preslikava. ZALOGA VREDNOSTI (SLIKA) preslikave A je enaka $\boxed{AX = \operatorname{im} A}$ (IMAGE = SLIKA).

JEDRO preslikave A je

$$\boxed{\ker A = \{x \in X ; Ax = 0\}}$$

(KERNEL = JEDRO). Velja:

Jedro in slika linearne preslikave sta linearna podprostora.

Dokaz: Vzemimo vektorja $Ax, Az \in \operatorname{im} A$. Potem je $Ax + Az = A(x+z) \in \operatorname{im} A$ in $\lambda Ax = A(\lambda x) \in \operatorname{im} A$. Tako je $\operatorname{im} A$ linearen podprostor v Y.

Denimo da sta $x, z \in \ker A$. Potem je $A(x+z) = Ax + Az = 0 + 0 = 0$, zato je $x + z \in \ker A$. Tudi $A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda 0 = 0$, zato je $\lambda x \in \ker A$. □

Če je $A : X \to Y$ linearna in H ogrodje za X, je AH ogrodje za $\operatorname{im} A$.

Dokaz. Naj bo $y = Ax \in \operatorname{im} A$. Ker je $x = t_1 h_1 + \dots + t_n h_n$, kjer so $h_1, \dots, h_n \in H$, je $Ax = t_1(Ah_1) + \dots + t_n(Ah_n)$, kjer so $Ah_1, \dots, Ah_n \in AH$. □

Linearna preslikava $A : X \to Y$ je injektivna natanko ~~takrat~~, ko je $\ker A = \{0\}$.

Dokaz. Ker je $A0 = 0$, iz injektivnosti preslikave A sledi $\ker A = \{0\}$. Denimo sedaj, da je $\ker A = \{0\}$ in $Ax = Az$. Potem je $A(x-z) = Ax - Az = 0$, zato $x - z \in \ker A = \{0\}$, torej $x - z = 0$ in $x = z$. $\square$

Primeri: 1. Naj bo $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotni projektor na os x: $P(x, y, z) = (x, 0, 0)$. Jedro projektorja P je ravnina yz, zaloga vrednosti os x.

2. Naj bo $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotni projektor na ravnino xy: $Q(x, y, z) = (x, y, 0)$. Slika je ravnina xy, jedro os z.

3. Naj bo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definirana s $T(x, y, z) = (y, z)$. Očitno je T surjektivna, se pravi $\operatorname{im} T = \mathbb{R}^2$. Če je $T(x, y, z) = (0, 0)$, sta $y = z = 0$. Tako je $\ker T = \{(x, 0, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$, se pravi jedro preslikave T je os x.

4. Naj bo p premica skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$ in $0 < \alpha < 2\pi$. Naj bo V vrtenje okrog p za kot α. Potem je $\operatorname{im} V = \mathbb{R}^3$ in $\ker V = \{0\}$. Preslikava $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je bijektivna.

Def. Naj bo $A : X \to Y$ linearna preslikava. Dimenzija zaloge vrednosti preslikave A je RANG preslikave A:

$$\boxed{\operatorname{rang} A = \dim(\operatorname{im} A)}$$

V primeru 1 je $\operatorname{rang} P = 1$. V primeru 2 je $\operatorname{rang} Q = 2$. V primeru 3 je $\operatorname{rang} T = 2$. V primeru 4 je $\operatorname{rang} V = 3$.

Izrek: Naj bo X končno razsežen vektorski prostor in $A: X \to Y$ linearna preslikava. Potem je

$$\boxed{\dim X = \dim(\ker A) + \dim(AX)} = \dim(\ker A) + \operatorname{rang} A.$$

Dokaz. Naj vektorji $\{e_1, \ldots, e_r\}$ sestavljajo bazo podprostora $\ker A$. Z vektorji $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ dopolnimo to množico do baze prostora X. Vemo, da je $\{Ae_i;\, i=1,\ldots,n\}$ ogrodje za $\operatorname{im} A$. Ker je $Ae_1 = \ldots = Ae_r = 0$, je $\{Ae_{r+1}, \ldots, Ae_n\}$ ogrodje za $\operatorname{im} A$.
Trdimo: $Ae_{r+1}, \ldots, Ae_n$ so linearno neodvisni. Pa denimo, da je

$$t_{r+1} Ae_{r+1} + \ldots + t_n Ae_n = 0$$

Prepišemo v

$$A(t_{r+1} e_{r+1} + \ldots + t_n e_n) = 0.$$

Torej je $t_{r+1} e_{r+1} + \ldots + t_n e_n \in \ker A$, zato je

$$t_{r+1} e_{r+1} + \ldots + t_n e_n = s_1 e_1 + \ldots + s_r e_r.$$

Od tod seveda sledi $t_{r+1} = \ldots = t_n = 0$. Zato je $\{Ae_{r+1}, \ldots, Ae_n\}$ baza za $\operatorname{im} A = AX$. Torej je $\operatorname{rang} A = \dim(\operatorname{im} A) = n - r$. $\square$

Trditev: Naj bo $A: X \to Y$ linearna in $\ker A = \{0\}$. Če je $\mathcal{F}$ linearno neodvisna množica v X, je $A(\mathcal{F})$ linearno neodvisna množica. Če je $\mathcal{F}$ baza za X, je $A(\mathcal{F})$ baza za AX in $\dim X = \dim(AX)$.

D. Naj bo $\{f_1, \ldots, f_n\}$ linearno neodvisna množica. Denimo, da je
$$t_1(Af_1) + t_2(Af_2) + \cdots + t_n(Af_n) = 0.$$
Leva stran je enaka $A(t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n)$. Zato je $t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n \in \ker A = \{0\}$. Ker so $f_1, \ldots, f_n$ linearno neodvisni, je $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$. Dokazali smo, da so $Af_1, \ldots, Af_n$ linearno neodvisni. Za naslednjo trditev upoštevamo, da A ogrodje prostora X preslika na ogrodje prostora AX. Ker je A injektivna preslikava, je moč množice $\mathcal{F}$ enaka moči množice $A(\mathcal{F})$. □

Trditev: Naj bo $A: X \to Y$ bijektivna linearna preslikava. Potem je tudi inverzna preslikava $A^{-1}: Y \to X$ linearna. Pravimo, da je A IZOMORFIZEM prostora X na prostor Y. (Seveda je potem A^{-1} izomorfizem prostora Y na prostor X in $\dim X = \dim Y$.

D. Če sta $y, w \in Y = AX$, obstajata $x, z \in X$, da je $y = Ax$, $w = Az$. Ker je $A(x+z) = Ax + Az = y + w$, je
$$A^{-1}(y+w) = x + z = A^{-1}y + A^{-1}w.$$
Prav tako je $A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda y$, zato je
$$A^{-1}(\lambda y) = \lambda x = \lambda A^{-1} y. \quad \square$$

Izrek: Naj bo X končno razsežen vektorski prostor in $A: X \to X$ endomorfizem. Naslednje trditve so enakovredne:

1) $\ker A = \{0\}$;
2) A je surjektiven;
3) A je bijektiven
4) A je izomorfizem prostora X.

<u>Primer:</u> Naj bo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearen operator z lastnostjo $T(-1,1) = (1,2)$ in $T(1,2) = (3,1)$. Določimo rang T, ker T in matriko za T.

<u>R.</u> Zaloga vrednosti za T vsebuje vektorja $(1,2)$ in $(3,1)$, ki sta linearno neodvisna. Zato je rang $T \geq 2$. Ker je $\operatorname{im} T \subseteq \mathbb{R}^2$, je $\underline{\text{rang}\, T = 2}$ in $\operatorname{im} T = \mathbb{R}^2$. Ker T slika $\mathbb{R}^2$ nase, je po prejšnjem dokazanem T bijektivna in $\underline{\ker T = \{0\}}$.

Naj bo matrika za T enaka

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$-a+b = 1, \quad -c+d = 2$$
$$a+2b = 3, \quad c+2d = 1.$$

Seštejemo: $3b = 4$, $3d = 1$.

Tako je $b = \frac{4}{3}$, $a = b-1 = \frac{1}{3}$, $d = 1$, $c = 1-2d = -1$.

Tako je matrika za T enaka

$$\underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}.$$

Naj bo A matrika velikosti $m \times n$. Potem imamo A lahko za linearno preslikavo iz $\mathbb{K}^n$ v $\mathbb{K}^m$. RANG MATRIKE A je rang te linearne preslikave, torej $\dim(A\mathbb{K}^n)$:

$$\boxed{\operatorname{rang} A = \dim (A\mathbb{K}^n)}.$$

Vemo, da so $A\vec{e}_1, \ldots, A\vec{e}_n$ stolpci matrike A. Če je $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$, je $A\vec{x} = x_1 A\vec{e}_1 + \ldots + x_n A\vec{e}_n$. Tako je

$$\boxed{A\mathbb{K}^n = \operatorname{im} A = \operatorname{Lin}\{A\vec{e}_1, \ldots, A\vec{e}_n\}}.$$

(Ker je $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ ogrodje (celo baza) za $\mathbb{K}^n$, je $\{A\vec{e}_1, \ldots, A\vec{e}_n\}$ ogrodje za $A\mathbb{K}^n$ – lahko sklepamo tudi tako.)

Zaloga vrednosti matrike A je linearna ogrinjača stolpcev.

Vsaka maksimalna linearno neodvisna množica v $\{A\vec{e}_1, \ldots, A\vec{e}_n\}$ je baza za $\operatorname{im} A$. Torej:

Rang matrike A je maksimalno število linearno neodvisnih stolpcev v A.

Algoritem za določanje ranga:

Naredimo Gaussovo eliminacijo na stolpcih matrike A in pridelamo matriko B, ki ima stopničasto obliko po stolpcih. Neničelni stolpci v B sestavljajo bazo za linearno ogrinjačo stolpcev matrike A. Tako: Neničelni stolpci v B sestavljajo bazo za $\operatorname{im} A$ in njihovo število je rang A.

Primer: Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -12 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -7 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Z elementarnimi transformacijami <u>na stolpcih</u> iz A pridelamo:

$$\begin{bmatrix} 4 & -12 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & -7 & -2 \\ -3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ \frac{1}{4} & -7 & -2 \\ -\frac{3}{4} & 9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ \frac{1}{4} & -4 & -2 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & -2 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Torej je $\operatorname{rang} A = 2$ in $A\mathbb{R}^n$ je napeta na vektorja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

V enem od kasnejših poglavij bomo pokazali, da je za vsako matriko A

$$\boxed{\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A^T).}$$

Stolpci matrike A^T so ravno vrstice matrike A. Zato velja:
<u>Rang matrike A je maksimalno število linearno neodvisnih vrstic.</u>

<u>Primeri</u>: 1. Rang matrike $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

je enak 3, saj ima tri linearno neodvisne vrstice in to je maksimalno število linearno neodvisnih vrstic v B.

Še en

<u>algoritem za določanje ranga matrike:</u>

<u>Z elementarnimi vrstičnimi transformacijami iz A predelamo matriko B, ki ima stopničasto obliko. Potem je rang A = rang B je število neničelnih vrstic v B.</u>

(Mimogrede, ker so vrstice matrike A stolpci matrike A^T, neničelne vrstice v B sestavljajo bazo za im (A^T).)

<u>Primer:</u> Najdi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -12 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -7 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Ker ima A tri stolpce, je rang $A \leq 3$. Napravimo Gaussovo eliminacijo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Končna matrika ima stopničasto obliko in dve neničelni vrstici, zato je rang A = 2. (Vektorja (1,0,2) in (0,1,-3) pa sestavljata bazo za im (A^T).)

<u>Če je A nesingularna $n \times n$ matrika, je rang $A = n$.</u>

(Dokazali smo, da je linearna ogrinjača stolpcev enaka K^n, zato je rang $A = n$.)

Primer: Naj bo $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dana z

$$A(x,y,z) = (2x-y-z, -6x+3y+3z).$$

Določimo matriko za A, rang A, im A in ker A.

Rešitev: Matrika za A ima velikost 2×3. Računajmo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y-z \\ -6x+3y+3z \end{bmatrix}.$$

Torej je matrika za A enaka

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Če naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih, pridelamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tako je rang $A = \underline{1}$ in im A napeta na vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, torej enaka $\mathrm{Lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\} = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \left\{x\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ -3x \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R}\right\}$.

Vidimo, da je im $A = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; y = -3x\right\}$, se pravi premica v ravnini xy z enačbo $y = -3x$.

Iz $A(x,y,z) = (0,0)$ sledi $2x-y-z=0$ in $-6x+3y+3z=0$. Ker je $-6x+3y+3z = -3(2x-y-z) = 0$, je druga enačba posledica prve in jo lahko odvržemo.

Torej je ker $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x-y-z=0\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ z enačbo $2x-y-z=0$. Ta ravnina vsebuje izhodišče in je dvorazsežen linearen podprostor v $\mathbb{R}^3$.

NALOGE

1. Naj bo $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana z $g(x,y) = 2x - y$. Pokaži, da je g linearen funkcional. Določi $\operatorname{im} g$, $\ker g$ in $\operatorname{rang} g$. Določi vektor $\vec{b}$, da je $f(\vec{r}) = \langle \vec{r}, \vec{b} \rangle$ za vse $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$.

2. Naj bo $Z: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez ravnino yz. Določi $\operatorname{im} Z$, $\ker Z$, $\operatorname{rang} Z$ in napiši matriko za Z.

3. Naj bo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana z $f(x,y,z) = 2x - y + 3z$. Pokaži, da je f linearen funkcional. Določi $\operatorname{im} f$, $\ker f$ in $\operatorname{rang} f$. Določi vektor $\vec{a}$, da je $f(\vec{r}) = \langle \vec{r}, \vec{a} \rangle$ za vsak $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Napiši matriko za f.

4. Naj bo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definirana z

$$F(x,y) = (3x - y, x + 2y, 4x + y).$$

   a) Določi matriko A za F, $\operatorname{rang} F$, $\operatorname{im} F$ in $\ker F$.

   b) Določi $\operatorname{rang}(A^T)$, $\operatorname{im}(A^T)$ in $\ker(A^T)$.

5. Naj bo $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $T: M_2 \to M_2$ definirana s $T(A) = NA$. Pokaži, da je T linearna. Določi $\ker T$ in $\operatorname{im} T$ ter $\operatorname{rang} T$.

6. Naj bo $\mathcal{P}_n$ prostor vseh polinomov stopnje največ n in $D: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ odvajanje. Določi $\operatorname{im} D$, $\ker D$.

* 7. Naj bo $\mathcal{P}$ prostor vseh polinomov in preslikavi $M, A: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definirani z $(Mp)(x) = xp(x)$, $(Ap)(x) = p(-x) + p(x)$. Določi jedro in zalogo vrednosti za M, A.