5. ZVEZA MED LINEARNIMI PRESLIKAVAMI IN MATRIKAMI

Naj bo $A: \mathbb{R}^{m \times n}$ matrika velikosti $m \times n$. Preslikava

$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

je linearna, saj je na desni produkt matrik, ki je distributiven: $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$. Velja pa tudi $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Vsako $m \times n$ matriko z realnimi elementi imamo torej lahko za linearno preslikavo iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$.

Vsako matriko $B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ pa imamo lahko za linearno preslikavo iz $\mathbb{C}^n$ v $\mathbb{C}^m$.

Naj bo

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

standardna ortonormirana baza v $\mathbb{K}^n$ in $A \in \mathbb{K}^{m \times n} = M_{mn}(\mathbb{K})$. Potem je

$$A\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A\vec{e}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Če je $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, je preslikava $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ iz $\mathbb{K}^n$ v $\mathbb{K}^m$ linearna in j-ti stolpec matrike A je enak $A\vec{e}_j$.

Če poznamo $A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n$, poznamo vse stolpce matrike A in tako matriko A. To lahko še bolj posplošimo:

Linearna preslikava $A: X \to Y$ je povsem določena, če poznamo njene vrednosti na neki bazi prostora X.

Dokaz. Naj bo $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza za X. Če je $x \in X$, je $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, zato je $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j (Ae_j)$. $\square$

Naj bo $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza vektorskega prostora X in $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ poljubni elementi vektorskega prostora Y. Obstaja natanko ena linearna preslikava $B : X \to Y$ z lastnostjo $Be_i = v_i$.

Dokaz. Za $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ mora veljati $Bx = \sum_{i=1}^{n} x_i (Be_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$. Ker je $\lambda x = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i e_i$, je $B(\lambda x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i v_i = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right) = \lambda Bx$. Če je še $z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$, je $x + z = \sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i) e_i$, zato $B(x+z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i) v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} z_i v_i = Bx + Bz$. $\square$

V vektorskem prostoru X imamo izbrano bazo $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, v vektorskem prostoru Y pa imamo bazo $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$. Naj bo $A : X \to Y$ linearna preslikava.
Ker je $Ae_j \in Y$, lahko Ae_j razvijemo po bazi $\mathcal{F}$:

$$\boxed{Ae_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}}$$

Če je $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, je $Ax = y = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

Kakšna je zveza med stolpcema za x in za y?

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j Ae_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j f_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j f_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) f_i = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i .$$

Torej je $y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j$ in zato

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Linearni preslikavi A smo priredili matriko

$$A_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots\; - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zapomnimo si:

<u>Stolpci te matrike so slike baznih vektorjev.</u>

Prvi stolpec je slika 1. baznega vektorja, drugi je slika drugega baznega vektorja, ...

Izrek: Naj bo X vektorski prostor z bazo $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ in Y vektorski prostor z bazo $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. Linearni preslikavi $A: X \to Y$ pripada $m \times n$ matrika

$$A_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix},$$

katere j-ti stolpec je enak Ae_j. Stolpec za Ax dobimo tako, da zmnožimo matriko $A_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ s stolpcem za x.

V prostorih $\mathbb{R}^n$ za bazo navadno vzamemo standardno ortonormirano bazo (standardno ONB).

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tako smo tesno povezali linearne preslikave med končnorazsežnima vektorskima prostoroma in matrike.

Če je $Y = X$, seveda vzamemo $\mathcal{F} = \mathcal{E}$. Prav tako je $n = m$. Torej:

Izrek: Če je X vektorski prostor z bazo $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, vsakemu linearnemu operatorju $A: X \to X$ pripada kvadratna matrika $A_{\mathcal{E}} \in M_n$. Stolpci te matrike so slike baznih vektorjev.

Naj bo $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linearna preslikava in

$$\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

ustrezna matrika. (Stolpci so enaki: $A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, \dots, A\vec{e}_n$.) Potem je

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ - - - - \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ - - - - \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ - - - - \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

<u>Katerakoli linearna preslikava iz $\mathbb{K}^n$ v $\mathbb{K}^m$ deluje na način, opisan v okvirju.</u>

Tu so a_{ij} konstante ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$).

Če izberemo poljubne konstante a_{ij} ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$), nam formula v okvirju določa linearno preslikavo iz $\mathbb{K}^n$ v $\mathbb{K}^m$.

Formula v okvirju nam omogoča prepoznati linearne preslikave med vsemi preslikavami iz $\mathbb{K}^n$ v $\mathbb{K}^m$ in jim prirediti ustrezno matriko.

Naj bo $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ linearen funkcional. Po formuli v okvirčku obstajajo natanko določene konstante $a_{11}, \dots, a_{1n}$, da je

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n =$$

$$= \langle (x_1, \dots, x_n), (a_{11}, \dots, a_{1n}) \rangle \quad , \text{če je } \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je

$$f(z_1, \dots, z_n) = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n =$$

$$= \langle (z_1, \dots, z_n), (\overline{a}_{11}, \dots, \overline{a}_{1n}) \rangle = \langle \vec{z}, \vec{a} \rangle,$$

kjer je $\vec{a} = (\overline{a}_{11}, \dots, \overline{a}_{1n})$.

Če je $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ linearen funkcional, obstaja natanko en vektor $\vec{a} \in \mathbb{K}^n$, da je

$$\boxed{f(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \quad \text{za vse } \vec{x} \in \mathbb{K}^n.}$$

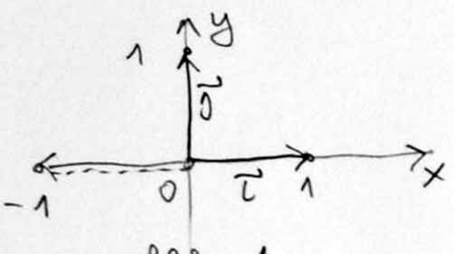
(Če je $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle$ za vse $\vec{x}$, je $\langle \vec{x}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = 0$ za vse $\vec{x}$, torej $\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = 0$ in $\vec{a} - \vec{b} = 0$.)

PRIMERI: 1. Naj bo $Z: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zrcaljenje čez os y.

Potem je (slika 1)

$$Z\vec{e}_1 = Z\vec{i} = -\vec{i} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Z\vec{e}_2 = Z\vec{j} = \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



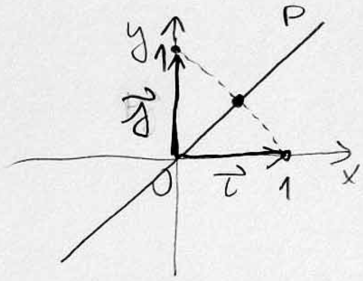
Slika 1.

Matrika za Z v bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ je

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{in} \quad P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

2. Naj bo $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pravokotna projekcija na premico p z enačbo $y = x$. Enotski vektor na p je $\vec{e} = (\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (slika 2). Potem je

$$P\vec{i} = \langle \vec{i}, \vec{e} \rangle \vec{e} = \langle (1,0), (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \rangle \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = P\vec{j}.$$



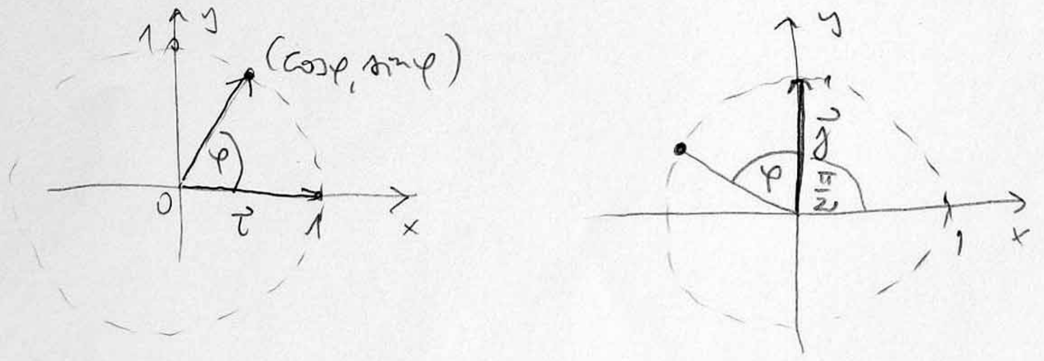
Slika 2

Tako je matrika za P v bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ enaka

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

in $$P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix}.$$

3. Naj bo R_φ rotacija za kot φ okrog izhodišča v $\mathbb{R}^2$.



Slika 3.

Po sliki 3 je $R_\varphi \vec{i} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$ in $R_\varphi \vec{j} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\varphi+\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$.

Ker je $\cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi$, $\sin(\varphi+\frac{\pi}{2}) = \cos\varphi$, je matrika za R_φ v bazi $\{\vec{i},\vec{j}\}$ enaka

$$\boxed{\begin{bmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{bmatrix}}$$

in

$$R_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

4. Pri rotaciji V_φ za kot φ okrog osi z v $\mathbb{R}^3$ je

$$V_\varphi \vec{i} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_\varphi \vec{j} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_\varphi \vec{k} = \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika za V_φ je

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Naj bo $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definirana s

$A(x,y) = (3x-y, x+2y, -x+7y)$.

Očitno je A linearna preslikava. Zapišimo

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ a_{31}x + a_{32}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - y \\ x + 2y \\ -x + 7y \end{bmatrix}.$$

Tako je $a_{11} = 3$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{31} = -1$, $a_{32} = 7$.

Torej je

$$A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&-1\\1&2\\-1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

Naj bo $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearna preslikava. Če je p premica, podana parametrično:

$$\{\vec{r}_0 + s\vec{a};\ s\in\mathbb{R}\} \qquad (\vec{a} \neq 0),$$

je

$$Tp = \{T(\vec{r}_0 + s\vec{a});\ s\in\mathbb{R}\} = \{T\vec{r}_0 + sT\vec{a};\ s\in\mathbb{R}\}$$

Če je $T\vec{a}\neq 0$, je Tp premica skozi točko $T\vec{r}_0$ in $T\vec{a}$ vektor na premici.

Če je $T\vec{a} = 0$, je $Tp = T\vec{r}_0$: celotno premico p nam T preslika v točko $T\vec{r}_0$.

Enako vidimo:

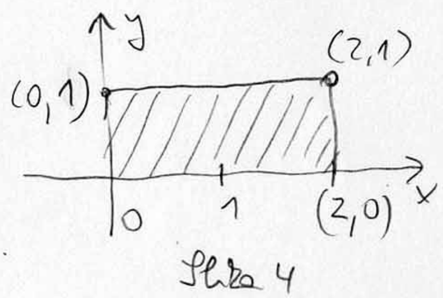
Linearna preslikava T daljico AB preslika na daljico od TA do TB ali pa v točko $TA = TB$.

Če je Tp premica in premica q vzporedna premici p, vektor $\vec{a}$ leži tudi na q, zato je Tq tudi premica in $Tq \parallel Tp$.

PRIMER: Naj bo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirana s $T(x,y) = (x, x+y)$. Potem je

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$ in T linearna.

V kaj T preslika pravokotnik $[0,2]\times[0,1]$ (slika 4)?

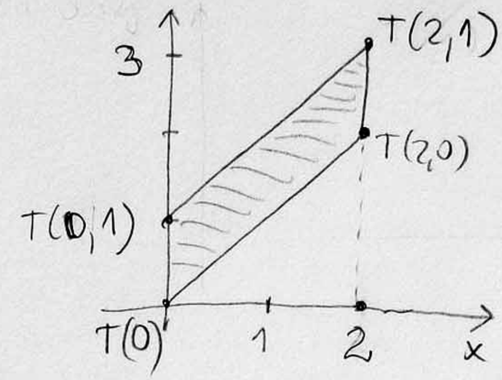


Slika 4

Poglejmo sliko oglišč pravokotnika: Tu je

$T(0,0)=(0,0)$, $T(2,0)=(2,2)$, $T(2,1)=(2,3)$, $T(0,1)=(0,1)$.

(slika 5).



Slika 5

Ker T preslika daljice na daljice, je slika pravokotnika osenčeni paralelogram na sliki 5. Če bi upoštevali, da T preslika par vzporednih daljic v par vzporednih daljic, bi si lahko prihranili še nekaj računanja.

NALOGE

1. Naj bo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirana s $T(x,y)=(2x+y, x-3y)$.
   a) Napiši matriko za T.
   b) Če je $A(1,2)$ in $B(-3,-1)$ in AB daljica od A do B, določi TA, TB in $T(AB)$.

2. Naj bo $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotacija okrog izhodišča za kot $-90°$. Napiši matriko za V. Če je $A(1,2)$ in $B(-3,-1)$, določi VA, VB in $V(AB)$.

3. Naj bosta $S, T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirani s
   $S(x,y)=(x+y+1, y-x)$,
   $T(x,y)=(2x-3y, xy)$.
   Ali sta S, T linearna operatorja? Odgovor utemelji.

4. Naj bo $Z: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez ravnino xz.

a) Določi matriko za Z.

b) Če je p premica, dana z $\vec{r} = (0,5,0) + s(2,3,-1)$ $(s \in \mathbb{R})$, določi $Z(p)$.

5. Naj bo $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pravokotna projekcija na premico $y = x\sqrt{3}$.

a) Določi matriko za P.

b) Če je $A(4,0)$ in $B(0, \frac{4}{3}\sqrt{3})$, določi $P(A)$, $P(B)$ in $P(AB)$.

6. Naj bo Σ ravnina z enačbo $y = z$ in $W: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje čez Σ. Določi matriko za W.

7. Naj bo $Z: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zrcaljenje čez premico $y = -x$.

a) Določi matriko za Z.

b) Naj bo p premica $y = x$. Določi $Z(p)$.

c) Naj bo q premica $\vec{r} = (0,1) + s(2, \frac{1}{2})$ $(s \in \mathbb{R})$. Določi $Z(q)$. Nariši q in $Z(q)$.

* 8. Naj bo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirana s $T(x,y) = (3x-y, x+y)$.

a) Če je $T(x,y) = (0,1)$, določi x in y.

b) Izračunaj $T(T(x,y))$.

c) Če je p os x in q os y, določi $T(p)$ in $T(q)$.

d) Če je r premica z enačbo $y = 2x - 1$, določi $T(r)$.

9. Naj bo $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definirana z $A\vec{x} = \vec{k} \times \vec{x}$. Določi matriko za A. (Tu je $\vec{k} = (0,0,1)$.)