Naloga: Reševanje robnega problema s končnimi diferencami.
Do problema reševanja sistema linearnih enačb pridemo tudi npr. pri reševanju robnega problema drugega reda z metodo končnih diferenc. Vzemimo najpreprostejši primer:
Rešujemo

$$y''(x) = f(x), \quad y(a) = y_a,\ y(b) = y_b. \tag{1}$$

Določiti želimo torej funkcijo y, katere drugi odvod je enak f, y pa zadošča t.i. robnima pogojema $y(a) = y_a$ in $y(b) = y_b$. V splošnem takega problema ne znamo rešiti, saj funkcije f morda ne znamo dvakrat integrirati. Zato nam ponavadi preostane le še numerično reševanje. Kaj pomeni numerično rešiti problem (1)? Nič drugega, kot na intervalu $[a, b]$ poiskati numerične približke $y_i \approx y(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pri čemer je $a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} := b$. Več kot je izbranih točk x_i, bolj natančen opis funkcije y s približki y_i pričakujemo. Zaradi enostavnosti ponavadi predpostavimo, da je $x_{i+1} - x_i =: h$ za vse i. Drugače povedano, točke x_i naj bodo ekvidistantne. Da bi lahko reševali problem (1), moramo najprej aproksimirati $y''(x_i)$. To naredimo s t.i. drugimi diferencami

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} + \text{napaka} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \text{napaka}.$$

Torej mora veljati (če zanemarimo napako, ki je sorazmerna s h^2)

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ker morata biti ozpolnjena robna pogoja, sta prva in zadnja enačba malce drugačni, namreč

$$\begin{aligned} -2y_1 + y_2 &= h^2 f(x_1) - y_a \\ y_{n-1} - 2y_n &= h^2 f(x_n) - y_b. \end{aligned}$$

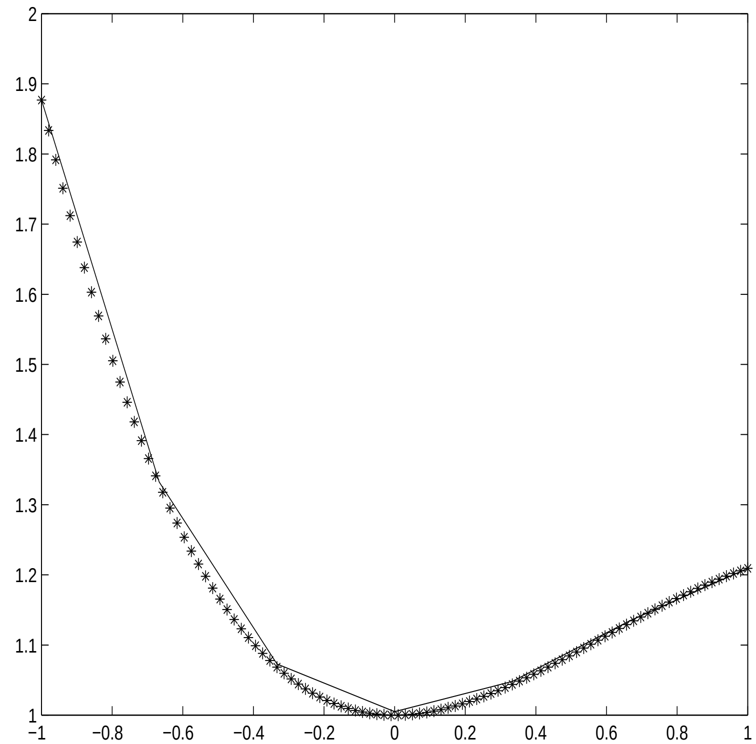
Tako dobimo sistem enačb

$$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = [h^2 f(x_1) - y_a, h^2 f(x_2) \ldots h^2 f(x_{n-1}), h^2 f(x_n) - y_b]^T$$



Slika 1: Graf točne rešitve (*) in numerične rešitve za $n = 5$ (-).

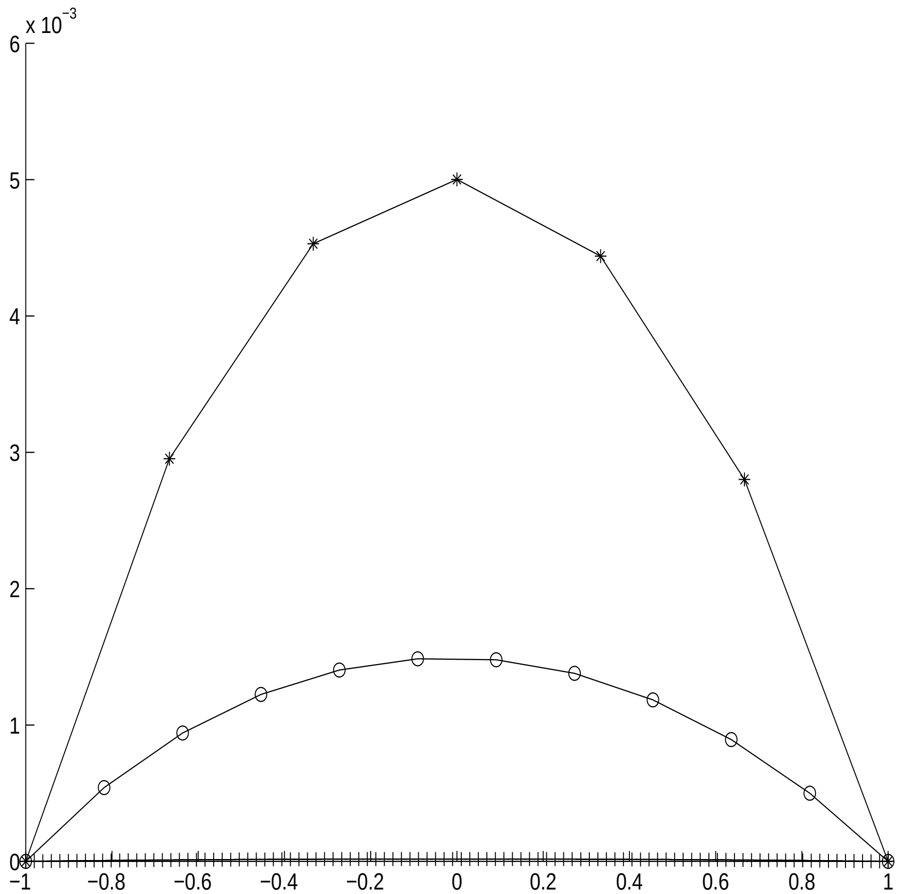
in $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_m]^T$ vektor neznanih približkov.
Sistem (2) je tridiagonalen, zato ga v primeru, ko je delilnih točk x_i zelo veliko (torej, ko je n velik), rešujemo tako, da ne predstavimo cele matrike A, pač pa le njene tri glavne diagonale.

Primer 1 *Rešujemo robni problem*

$$y''(x) = e^{-x} - \sin x, \quad y(-1) = 1.8768,\ y(1) = 1.2093.$$

Na sliki 1 je narisana analitična rešitev (zvezdice) ter numerična rešitev (polna črta) pri $n = 5$*. Na sliki 2 pa napaka pri* $n = 5$ *(zvezdice),* $n = 10$ *(krogci) in* $n = 100$ *(plusi). Analitična rešitev problema je*

$$y(x) = \exp(-x) + \sin(x).$$



Slika 2: Grafi napak pri $n = 5$ (zvezdice), $n = 10$ (krožci) in $n = 100$ (plusi).