MIS - TEORIJA

Zapis Petrijeve mreže z matrikami

$$C = (P, T, I, O)$$

$$D^{-}[i,j] = \#(p_j, I(t_i))$$ vhod

$$D^{+}[i,j] = \#(p_j, O(t_i))$$ izhod

Pogoj za vžig

$\sigma \geq e_j \cdot D^{-}$ (gleda se število žetonov) $[1,1,0] \rightarrow 2$ žetona

Vektor naslednjega stanja

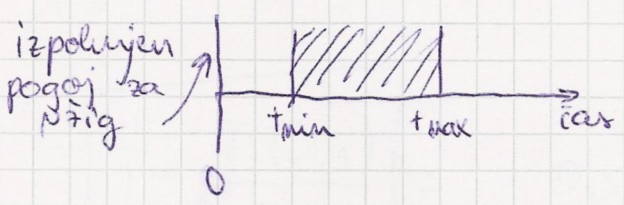
$\sigma_1 = \sigma_0 + e_j \cdot D$ / $\delta(\sigma, t) = \sigma - e_j \cdot D^{-} + e_j \cdot D^{+} =$

$= \sigma + e_j(-D^{-} + D^{+}) =$

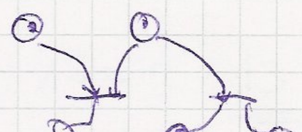
$= \sigma + e_j \cdot D$

Čas v petrijevih mrežah

- časovne petrijeve mreže predstavljajo razširitev Petrijevih mrež.
- Čas je vpeljan kot časovno okno v katerem se mora zgoditi vžig t, od tega, ko je bil prehod izbran.
- časovno okno je definirano s časoma t_{min} in t_{max}



konflikti:



rešimo z:
- prioritetami
- naključna izbira prehajanja
- več hkrati če ni konflikta

- časovni prehodi
- dodajanje dodatnega pogoja
- prioriteta

Prevedba avtomata v Petrijevo mrežo

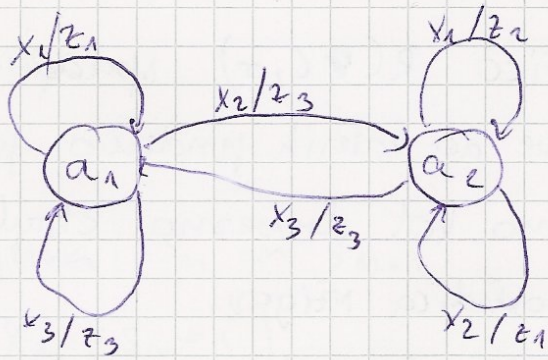
Avtomat je $A = \{X, Y, Z, \delta, \lambda\}$

X: končna neprazna množica vhodnih črk $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$
Y: — " — notranjih črk $\{y_1, y_2, \ldots\}$
Z: — " — (lahko prazna) zunanjih črk $\{z_1 \ldots\}$
$\delta: Y \times X \to Y$: funkcija naslednjega stanja
$\lambda: Y \times X \to Z$: izhodna funkcija avtomata

$C = (P, T, I, O)$
$P = X \cup Y \cup Z$ množica mest Petrijeve mreže
$T = \{t_{y,x} \mid y \in Y, x \in X\}$ množica prehodov
$I(t_{y,x}) = \{y, x\}$ vhodne posplošene množice
$O(t_{y,x}) = \{\delta(y, x), \lambda(y, x)\}$ izhodne posplošene množice

primer:

	a_1	a_2
x_1	a_1/z_1	a_2/z_3
x_2	a_2/z_2	a_2/z_1
x_3	a_1/z_3	a_1/z_3



$P = \{x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, z_1, z_2, z_3\}$
$T = \{t_{a_1 x_1}, t_{a_2 x_1}, t_{a_1 x_2}, t_{a_2 x_2}, t \ldots t_{a_2, x_3}\}$
$I(t_{11}) = \{a_1, x_1\}$
$O(t_{11}) = \{a_1, z_1\}$

Formalni zapis Petrijeve mreže

$C = (P, T, I, O)$

P ... mesta

T ... prehodi

I ... vhodi

O ... izhodi

I ... vhodna funkcija iz $T \sim P^\infty$

O ... izhodna funkcija iz $T \sim P^\infty$

P^∞ ... posplošena množica P

$P \cap T = \{\}$

P in T sta tuji množica

Dualna Petrijeva mreža

$C_D = (T, P, I, O)$

Inverzna Petrijeva mreža

$C_I = (P, T, O, I)$

Dosegljivost v petrijevih mrežah.

množica $R(C, \sigma)$ σ - začetna označitev

V množico $R(C,\sigma)$ spada začetna označitev in vse označitve do katerih pridemo preko vžigov v PM.
Označimo kot drevesno strukturo. V listih so označitve ki so posledica vžigov.
Iskanje dosegljivosti se zaključi:
- ni več pogoja za vžig
- ko se zaciklamo
- ko se število žetonov neomejeno povečuje

Kako se znebimo inhibicijskega vhoda

Inhibicijski vhod: ~~mesto~~ prehod je izbran samo ko mesto ki je povezano na inhibicijski vhod nima žetona.

Znebimo se ga tako, da uvedemo mesto, ki ima oznacitev, ki je nasprotna opazovanemu mestu.

Zvezne markovske verige (časovno zvezni) preveri!

$\{X_t : t \in T\}$ če velja $t_i \in \mathbb{R}^+_0$

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ in so stanja

$\forall s_i \in S = \mathbb{N}_0$ ter velja pogojna verjetnost

$$P[X(t_{n+1}) = s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n, X(t_{n-1}) = s_{n-1} \dots X(t_0) = s_0] =$$
$$= P[X(t_{n+1}) = s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n]$$

Prehajanje stanj markovske verige

stanja: $S = \{0, 1, 2 \dots\}$

verjetnost prehoda med stanjema s_n in s_{n+1}

$$p_{ij}^{(1)}(n) = P[X_{n+1} = s_{n+1} = j \mid X_n = s_n = i]$$

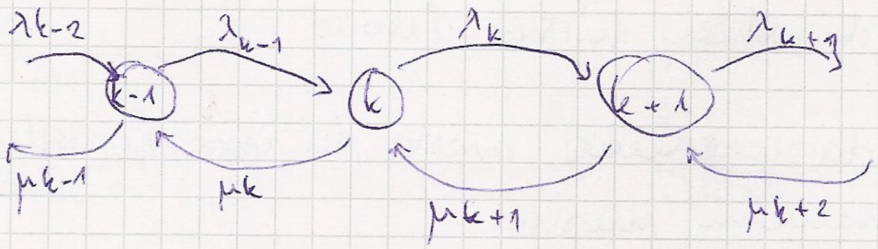
i, j ... prehod med stanji

(1) ... en korak v času n in $n+1$

(n) ... časovni korak

Globalno in lokalno ravnovesje MV

globalno



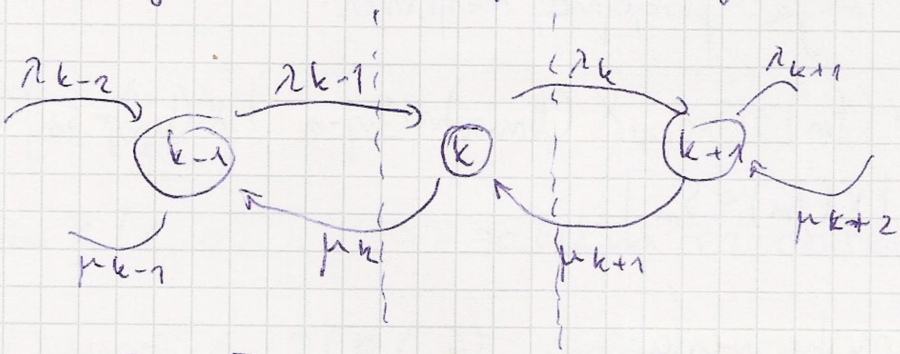
$$(\lambda_k + \mu_k)\Pi_k = \lambda_{k-1}\Pi_{k-1} + \mu_{k+1}\Pi_{k+1} \qquad k > 0$$

$$\lambda_0 \Pi_0 = \mu_1 \Pi_1$$

iz tu dobimo enačbo za rojstno smrtni sistem

lokalno

relacija med sosednjima stanjema



$$\lambda_{k-1}\Pi_{k-1} = \mu_k \Pi_k \qquad \lambda_k \Pi_k = \mu_{k+1}\Pi_{k+1}$$

$$\Pi_k = \Pi_{k-1}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}$$

Časovna homogenost

Markovski proces je časovno homogen, če je verjetnostna porazdelitev naključne spremenljivke $X(t_{n+1})$ ni odvisna od trenutnega opazovanega časa. Če je naključna spremenljivka invariantna za t_n, je potem tudi časovno homogena.

$$P[X(t_{n+1}) < s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n] = P[X(t_{n+1} - t_n) < s_{n+1} \mid X(t_0) = s_n]$$

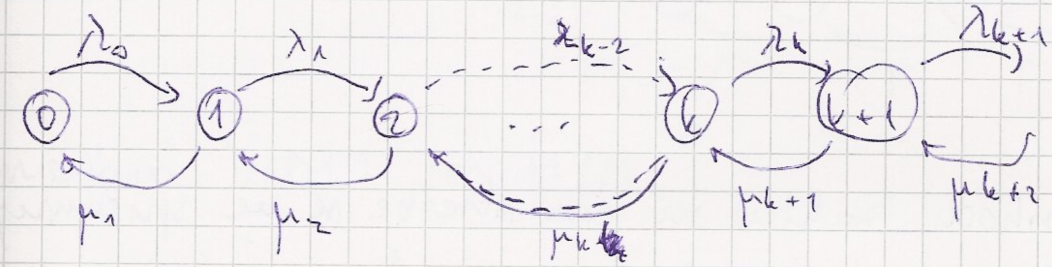
Splošen rojstno smrtni sistem

tak proces, kjer je prehajanje samo med sosednjimi stanji:

- iz k v $k+1$ – porojevanje zahtev
- iz k v $k-1$ – umiranje zahtev

λ_k intenzivnost porojevanja zahtev

μ_k intenzivnost umiranja zahtev



$\pi_k(t) = P[X(t) = k]$

možni dogodki: – se ne spremeni

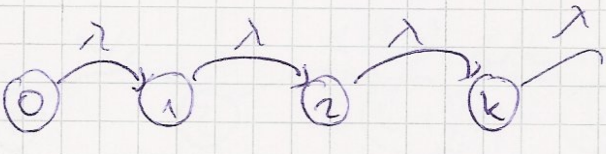
– se porodi nova zahteva

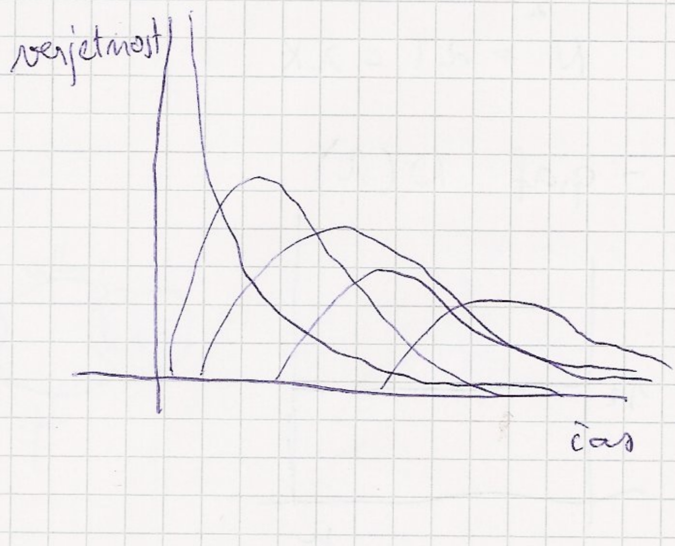
– umre zahteva

isti rojstni sistem

intenzivnosti prehajanja:

- porojevanja: $\lambda_k = \lambda$
- umiranja: $\mu_k = 0$





$\pi_0(t) = e^{-\lambda t}$

$\pi_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t} \qquad k \geq 0,\ t \geq 0$

d M/M/1 se razlikuje v tem da nima umiranja

Ergodičnost

Zbirno povprečje stohastičnega sistema:

$$E[X(T)] = \sum_{k=0}^{\infty} k P[X(T) = k]$$

Stohastični sistem je ergodičen, če je časovno povprečje enako zbirnemu povprečju, če gre čas T proti neskončno

$T \to \infty$

D/D/1

čas med prihodi zahtev in čas strežbe se ne spreminja

$t_i = t = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad$ $x_i = x = \frac{1}{\mu}$

$\mu > \lambda$: čakalna vrsta prazna

$t = x$: se ne spreminja

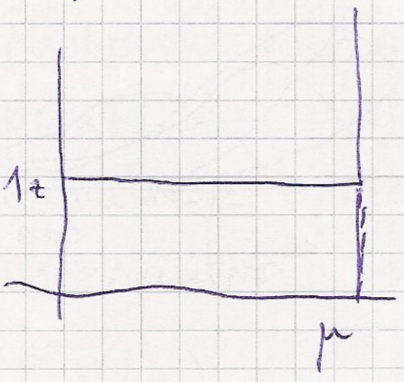
$t < x$: gre št zahtev v neskončnost

$T = W + x = x$

$N_q = \lambda W = 0$

$N = \lambda T = \lambda x$

- graf $N(\lambda)$ $\qquad$ - graf $T(\rho)$



M/M/1

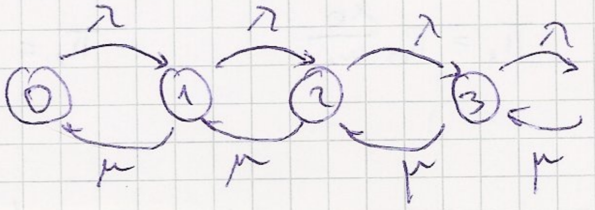
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ $\quad \pi_0 = 1-\rho$ $\quad T = \frac{1}{\mu-\lambda}$

$\pi_k = \pi_0 \rho^k = (1-\rho)\rho^k$

$W = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$

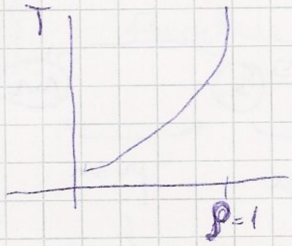
$\bar{N}_s = \rho$

$\bar{N}_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$



rimerjava D/D/1 in M/M/1

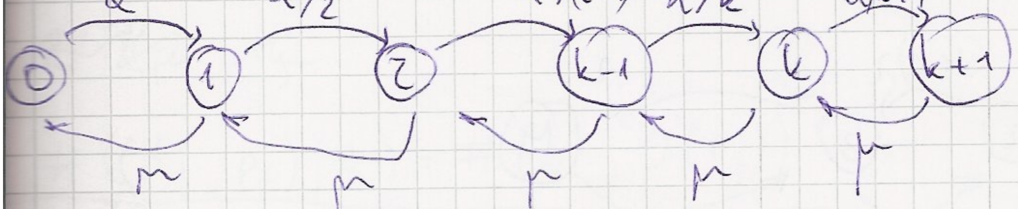
graf T(ρ) graf T(ρ) M/M/1



imerjava čistega rojstnega in M/M/1

M/M/1 ima umirljivost

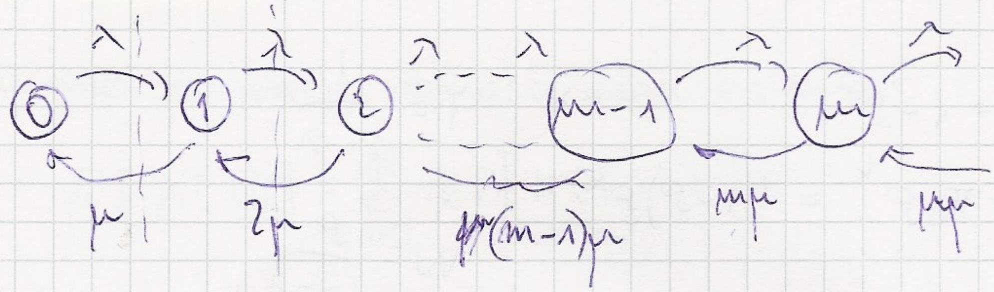
nahljiv strežni sistem



$\lambda_k = \frac{\alpha}{k+1}$

$\mu_k = \mu$

M/M/m



$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

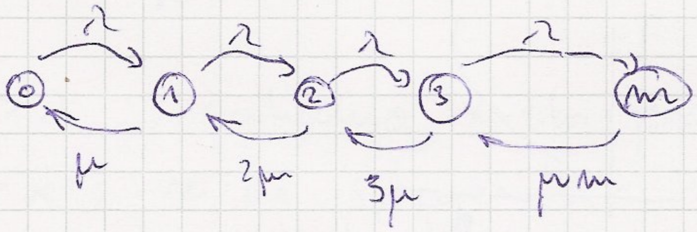
$$\pi_1 = \pi_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} \qquad \pi_2 = \pi_1 \frac{\lambda_1}{2\mu_2}$$

~~$\pi_1 = \lambda 2\pi_0$~~

Izravnani strežni sistem M/M/m/m

št strežnikov enako velikosti sistema

ni čakalne vrste.



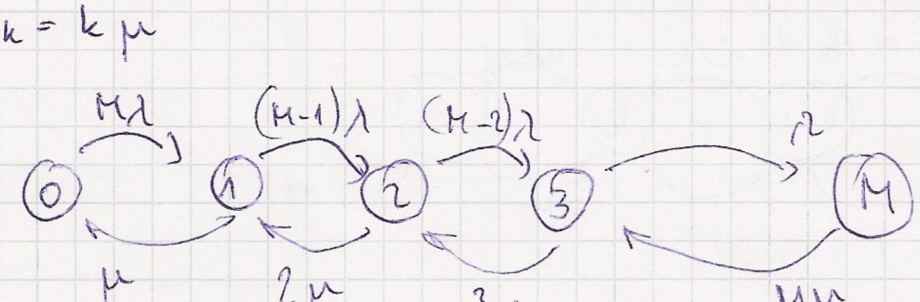
$$T = \frac{1}{\mu} \qquad \bar{D} = \frac{\lambda'}{\mu} = \frac{\lambda(1-\pi_m)}{\mu}$$

Sistem je poln ko vsi strežniki obdelujejo zahteve

M/M/∞//M

$$\lambda_k = \lambda(M-k) \qquad \boxed{0 \le k \le M}$$

$$\mu_k = k\mu$$



1) Proženje PM z množicami

če velja $p_i \in P$, $\sigma(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j))$

$$\sigma'(p_i) = \sigma(p_i) - \#(p_i, I(t_j)) + \#(p_i, O(t_j))$$

1) Pretvorba avtomata v PM

$A = \{X, Y, Z, \delta, \lambda\}$

$C = (P, T, I, O)$

$P = X \cup Y \cup Z$ množica mest PM

$T = \{t_{y,x} \mid y \in Y, x \in X\}$ množica prehodov

$I(t_{y,x}) = \{y, x\}$ vhodne posplošene množice

$O(t_{y,x}) = \{\delta(y,x), \lambda(y,x)\}$ izhodne posplošene množice

1) Graf PM

$G = (V, A)$ $V = \{v_1, v_2, \ldots v_s\}$ množica vozlišč

$A = \{a_1, a_2 \ldots a_r\}$ posplošena množica usmerjenih povezav

$a_i = (v_j, v_k) \in V$

$V = P \cup T$ za vsako $a_i \in A$ velja $v_j \in T$ in $v_k \in P$

$\#((p_i, t_j), A) = \#(p_i, I(t_j))$

~~$\#((p_i, t_j$~~

$\#((t_j, p_i), A) = \#(p_i, O(t_j))$

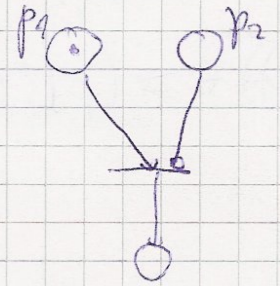
$G = (V, E)$

$V = T \cup P$, $E = \{(p_i, I(p_i))\} \cup \{(p_i, O(p_i))\}$; $p_i \in P$?

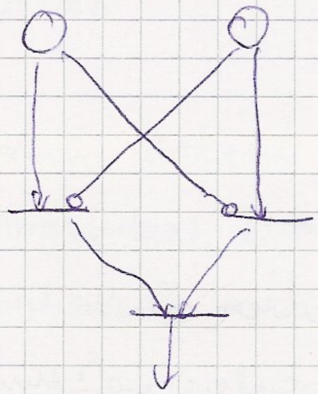
Petrijev graf $G = (V, A)$ ekvivalenten $C = (P, T, I, O)$

1) Razširitev PM

- inhibicijski vhod

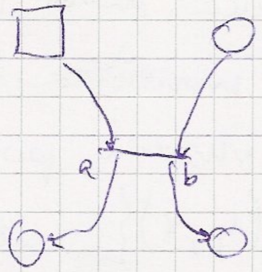


- xor



- stikalo

če stikalo ni označeno - stran b
a - sicer



2) Jezik PM

- besede, ki so rezultat izvajanja PM od začetka do konca
- Začetna označitev ima samo 1 žeton v začetnem mestu, ostala so prazna
- končna ima 1 žeton v končnem mestu ostala so prazna
- Besede PM so iz črk, ki so rezultat vžiga posameznega prehoda v PM

1) Možna stanja v PM ?

- absorbcijsko
- prehodno
- aciklično
- ciklično povratno

} stanja Markovske verige ?

2) M/M/m/k/M

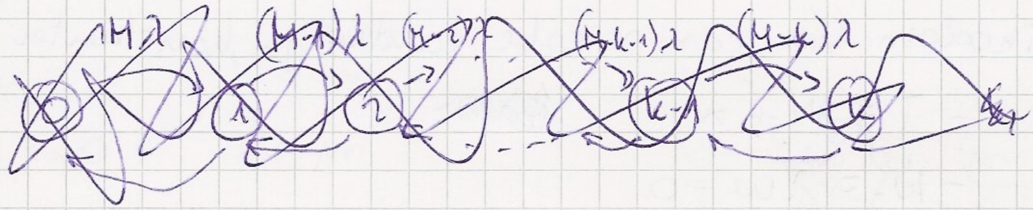
M: vhodna poissonova porazdelitev

M: izhodna eksponentna porazdelitev

m: število strežnikov

k: velikost sistema → k-m = dolžina vrste

M: velikost populacije

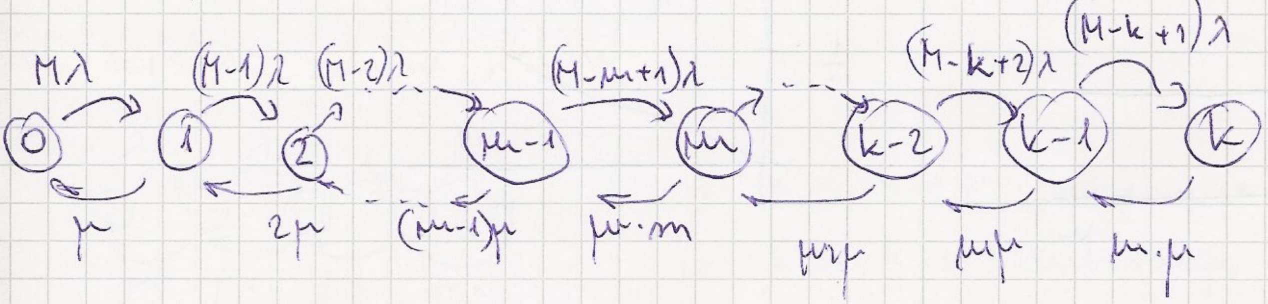


$k < M$

$\lambda_k = \lambda(M-k) \quad 0 \leq k \leq k-1$

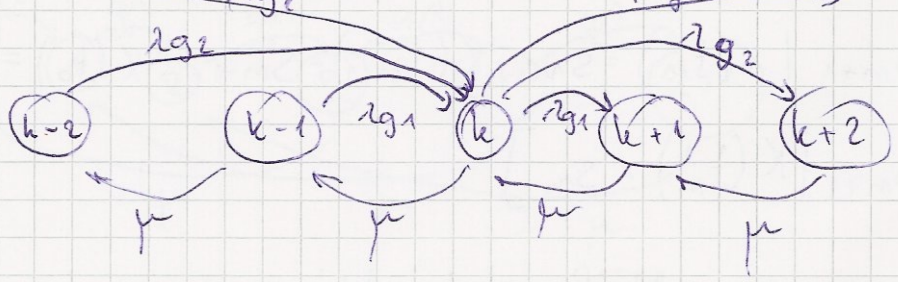
$\mu_k = k\mu \quad 0 \leq k \leq m$

$\mu_k = m \cdot \mu \quad k > m$



2) grupni prihodi

- zahteve prihajajo v skupinah
- verjetnost prihoda skupine velikost i



$\lambda = \lambda g_1 + \lambda g_2 + \ldots = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} g_i$

$(\lambda + \mu)\pi_k = \mu \pi_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i \lambda g_{k-i}$, $k \geq 0$

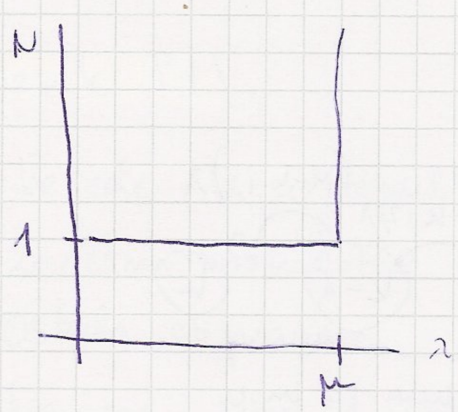
$\lambda \pi_0 = \mu \pi_1$

primer autobus

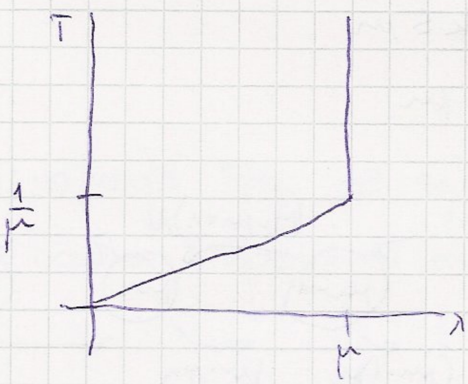
2) D / D / 1

- čas med prihodom in čas strežbe zahtev je konstanten
- $t = \frac{1}{\lambda}$
- $x = \frac{1}{\mu}$
- $T = W + x$
- $N_q = \lambda W = 0$
- $N = \lambda T = \lambda x$

- $N(\lambda)$



- $T(\lambda)$



2) Časovno zvezna markovska veriga

Podan stohastični proces $\{X_t \, ; \, t \in T\}$ je časovno zvezen M.P. če za $t_i \in \mathbb{R}_0^+$ kjer je $0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots t_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ in so stanja $\forall s_i \in S = \mathbb{N}$ ter velja pogojna verjetnost

$$P[X(t_{n+1}) = s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n , X(t_{n-1}) = s_{n-1} \ldots X(t_0) = s_0] =$$
$$= P[X(t_{n+1}) = s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n]$$

To pomeni da je zvezni M.P. stohastični proces brez pomnenja

2) Izhodna porazdelitev M/M/1

$$B(x) = 1 - e^{-x\mu}$$

2) Vhodna porazdelitev M/M/1

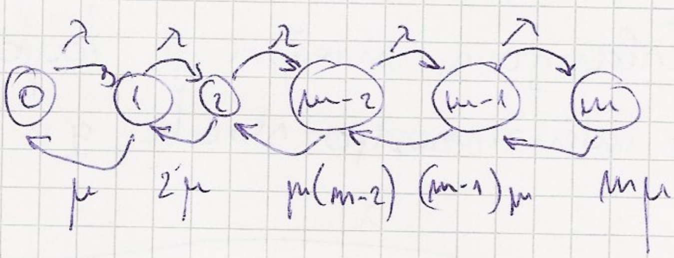
$$A(t) = 1 - e^{-t \cdot \lambda}$$

2) M/M/m/m

$\lambda_k = \lambda \qquad k < m$

$\lambda_k = 0 \qquad k \geq m$

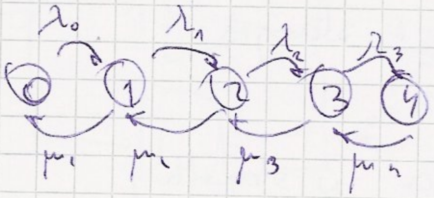
$\mu_k = k \cdot \mu \qquad k = 1, 2, 3, \dots$



Ni čakalne vrste $\qquad T = \frac{1}{\mu}$

$$\bar{N} = \frac{\lambda(1 - \Pi_m)}{\mu}$$

Čisti rojstno smrtni sistem

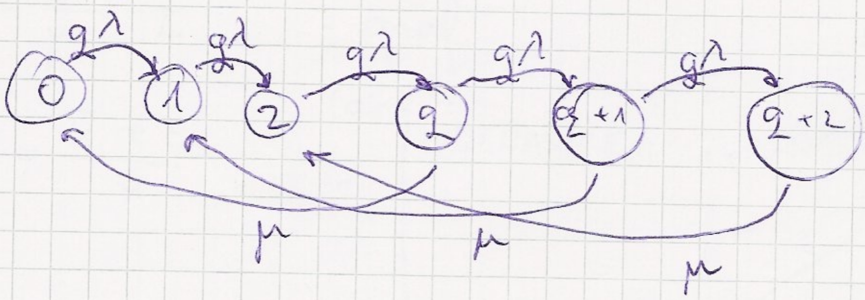


iz $k \sim k+1$: porajevanje

iz $k \sim k-1$: umiranje

$E_g/M/1$

- Erlangova porazdelitev na vhodu



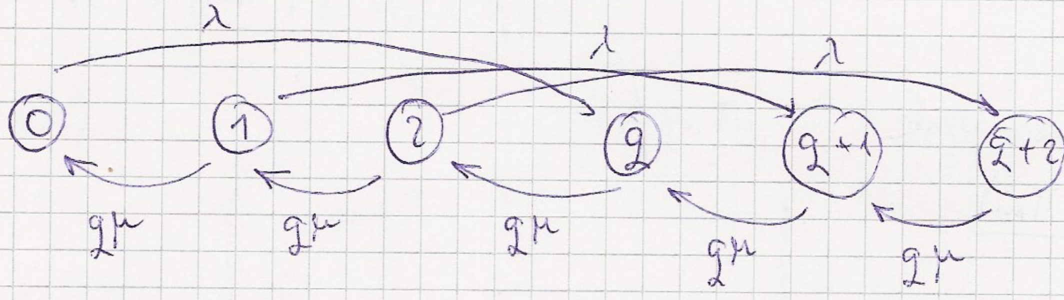
- Strežni sistem je prazen če je v stanjih od 0 do $g-1$
- V sistemu je k zahtev če se sistem nahaja v enem od stanj j

$$j = gk + i - 1 \qquad 1 \le i \le g$$

- Ena zahteva je od g do $2g-1$

$M / E_g / 1$

Erlangova strežba je zaporedna vezava g eksponentnih strežnikov z intenzivnostjo strežbe $g\mu$ / $B(s) = (H(s))^g = \left(\frac{g\mu}{s+g\mu}\right)^g$



- Sistem je prazen če je v stanju 0
- V sistemu je 1 zahteva če se sistem nahaja v stanju j

$$1 \le j \le g$$

- V sistemu je k zahtev če se nahaja v stanju j

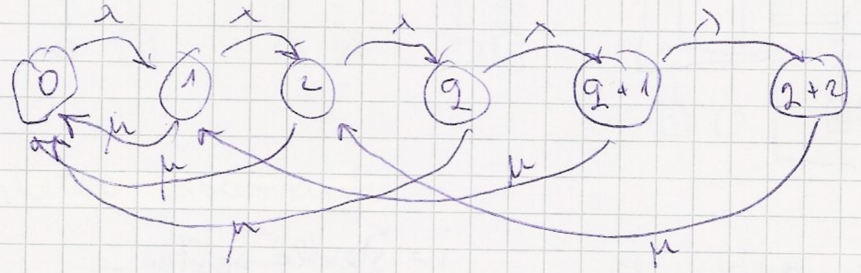
$$j = (k-1)g + (g-i+1) = kg - i + 1 \qquad 1 \le j \le g$$

$\pi_0 = 1 - \rho$

$\pi_k = (1-\rho)\rho^k \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$

Sistem z nakopičeno strežbo

q zahtev z intenzivnostjo μ če je v sistemu q ali več zahtev
z intenzivnostjo μ če je zahtev q ali manj

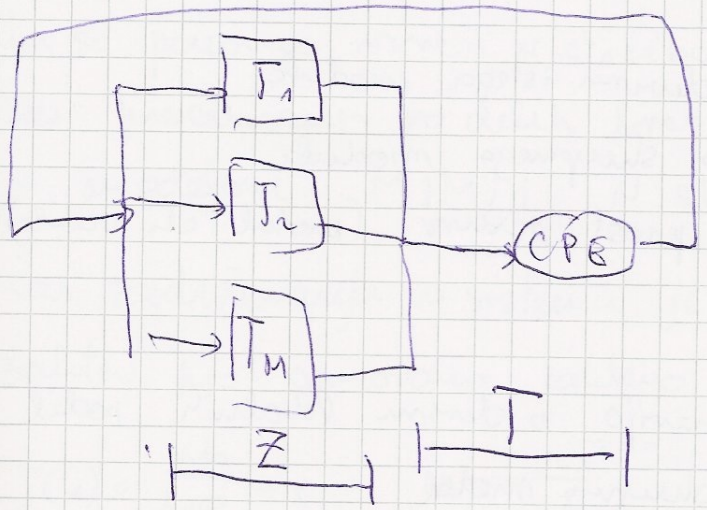


$$(\lambda + \mu)\pi_k = \mu\pi_{k+q} + \lambda\pi_{k-1} \qquad k > 1$$

$$\lambda\pi_0 = \mu(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_q)$$

Interaktivno procesiranje

strežna enota
M terminalov



$$Z + T = \frac{M}{R}$$ → propustnost

$$R = \mu(1 - P_0)$$

R v nenasičenju:

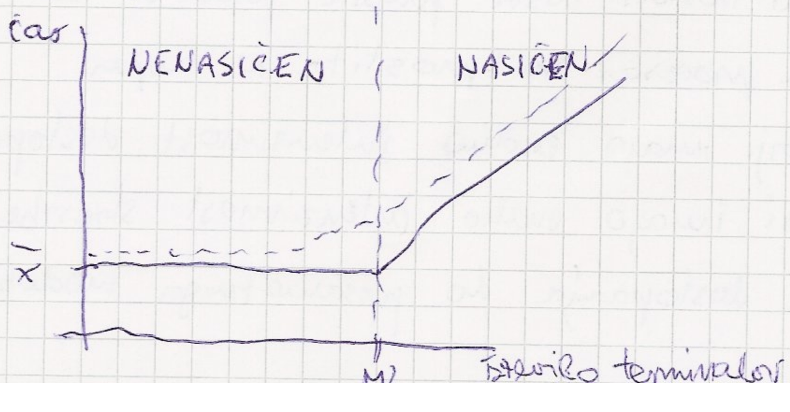
$R = \lambda$

R v nasičenju

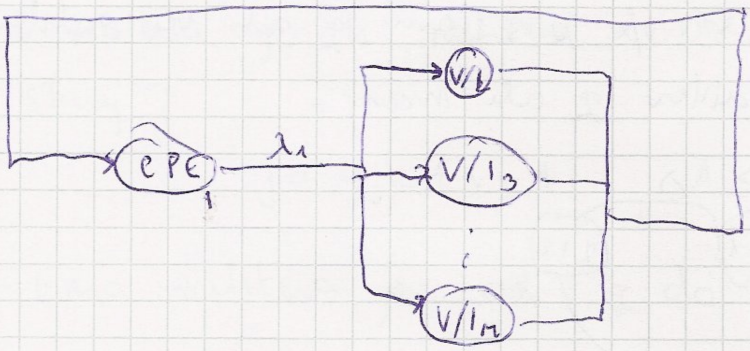
$R = \mu$

$$\bar{x} = \frac{M'}{\mu} - Z$$ - graf

$$M' = \frac{\bar{x} + Z}{\bar{x}}$$



Model multiprogramiranja



k zahtev

M = V/I + CPE

$\lambda_j(i) = p_j \lambda_1(i)$ $\quad j = 2, 3, \ldots M \quad$ i = število zahtev

$\rho_j(i) = \lambda_j(i)\bar{x}_j \quad j = 1, 2, \ldots M$

Celoten čas cikla posamezne zahteve z M SE in k zahtevami

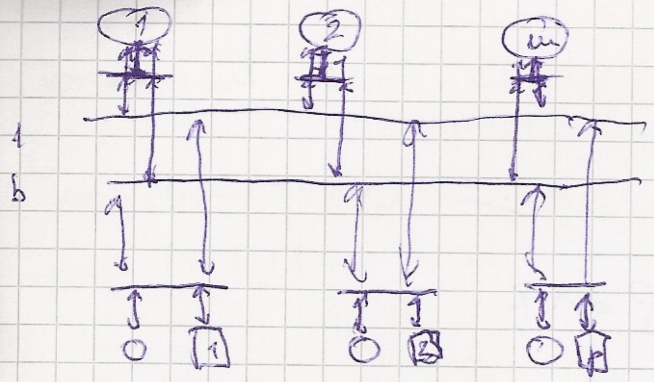
$$T = \frac{k}{\lambda_1} = T_1 + \sum_{j=2}^{M} p_j T_j$$

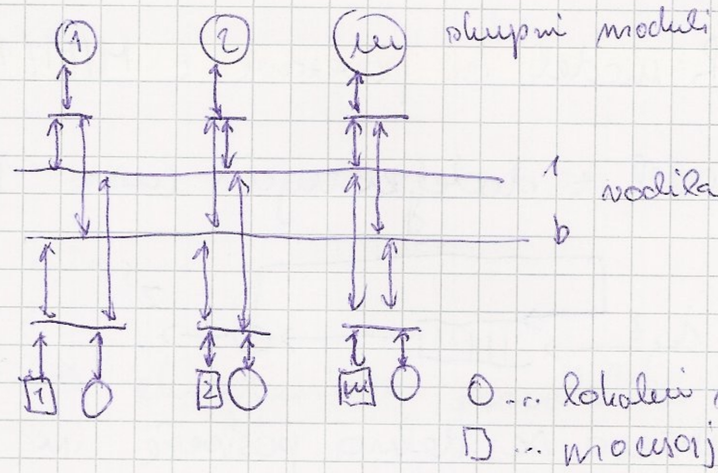
Markovski model vodil

3 stanja:
- procesor procesira v delni istega modula
- procesor dostopa do skupnega modula
- procesor čaka na prost resurs (modul ali vodilo)

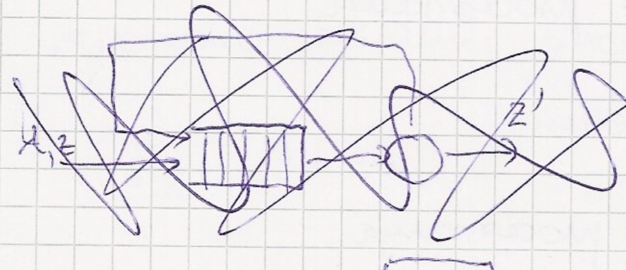
Postavitev markovske verige

- procesorji večino opravil opravijo v delni lokalnih vodil
- občasno berejo ali pišejo v skupni modul
- če sta pot do zahtevanega resursa in resurs prosta se zasedita takoj
- če pot ali resurs nista prosta procesor čaka
- vodilo in procesor se sprostita v hipu
- vsi procesorji imajo enako intenzivnost dostopa do vodil λ
- vsi resursi imajo enako intenzivnost strežbe μ
- verjetnosti dostopanja do posameznega modula so enake.





Paketno procesiranje



~~- zahteva se delno postreže in vrne v vrsto~~

~~- vsaka zahteva prejme enak del procesiranja~~

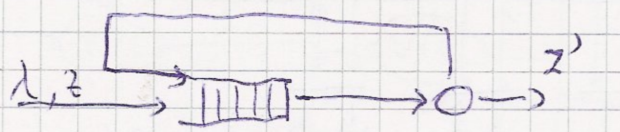
- ko se zahteva delno postreže se vrne v glavo čakalne vrste in se ponovno vrne v strežbo. ker zahteva prejme celoten čas procesiranja po delih brez prekinitve je možna primerjava z modelom M/M/1 v skripti piše M/G/1

- Čas zadrževanja v sistemu je vsota vseh strežnih časov zahtev pred opazovano zahtevo ter strežba opazovane zahteve

$$T(x) = \frac{W_0}{1-\rho} + x \qquad W_0 = \frac{\lambda \overline{x^2}}{2}$$

RR model in povezave z M/M/1

Model z dodeljevanjem časa RR



$\rho = \lambda \bar{x}$

- zahteva se delno postreže in vrne v čakalno vrsto
- Vsaka zahteva prejme enak delež procesiranja

Povprečen čas zadrževanja v sistemu

$$T(x) = \frac{x}{1-\rho}$$

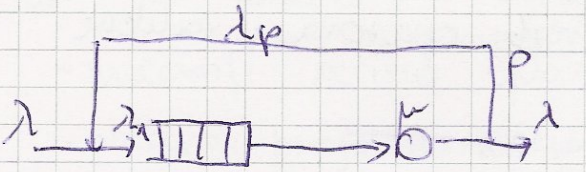
x… čas procesiranja

Povprečen čas zadrževanja v vrsti

$$W(x) = \frac{\rho x}{1-\rho}$$

Čas zadrževanja v čakalni vrsti je linearno odvisen od časa strežbe.

Strežni sistem z povratkom (delna vrnitev v strežbo)



$$\lambda_1 = \lambda + \lambda_p$$
$$\lambda_p = \lambda_1 \cdot p$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1-p}$$

$$T(\lambda_1) = T\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)$$

$$T = \frac{T(\lambda_1)}{1-p} = \frac{T\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)}{1-p}$$

zakaj se dvakrat deli z $(1-p)$: po formuli $T(\lambda_1)$ je to za notranji del, kot da ima sistem vhod λ_1 pri λ_1 pa se gleda še cikel

koeficient variance

pri $D/D/1 = 0$

pri $M/M/1 = 1$

$C = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ $\qquad C_x = \frac{\frac{1}{\mu}}{\bar{x}} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu}} = 1$ ⇒ eksponentna porazdelitev

9 zaporedno vezanih strežnikov z eksponentno porazd.

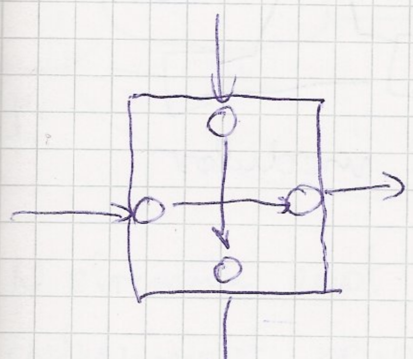
$C_x = \frac{1}{\sqrt{9}} < 1$

Povezovalniki resursov

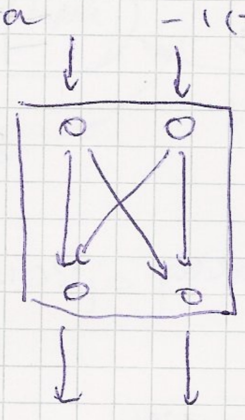
Povezujejo procesne enote za skupnimi moduli

$(P_1) \longleftrightarrow \boxed{B_1}$ Povezujejo resurse med seboj.

Tipi povezovalnikov:
- sistem vodil
- križni povezovalniki
- delta -"-



križni



delta

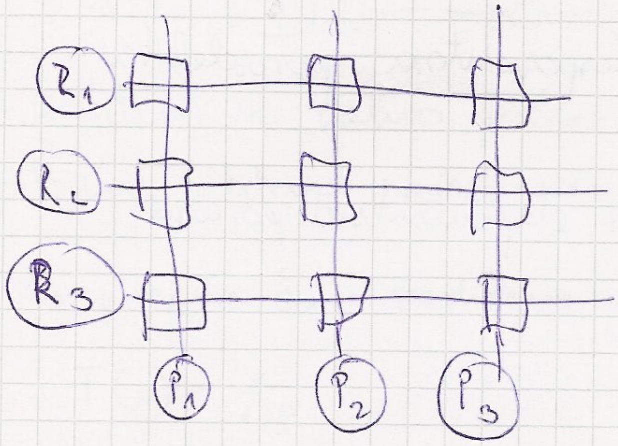
Uporabnost procesorjev $\quad U = \frac{BW}{m \lambda T}$

BW ... bandwidth
m ... št procesorjev
T ... čas cikla prenosa med proc. in modulom

propustnost: $R = V \cdot \lambda = \frac{BW}{mT}$

<u>križni:</u> št elementov je $O(n \cdot m)$

moduli procesorji



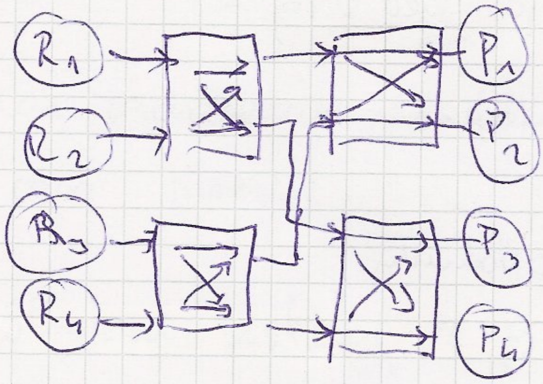
modul povezovalnik ne zaseda vodila

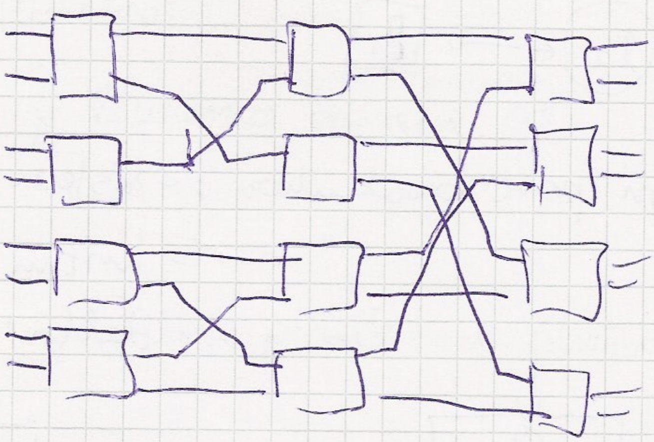
$$\left(1 - \frac{p}{m}\right)^n$$

Vsaj en zaseda vodilo

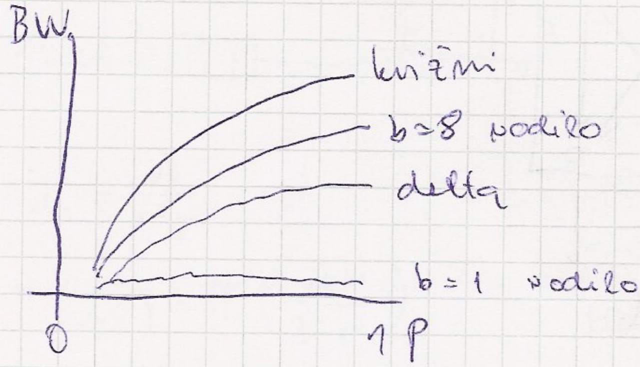
$$1 - \left(1 - \frac{p}{m}\right)^n$$

<u>delta:</u> št. elementov $O(n \cdot \log_2 m)$



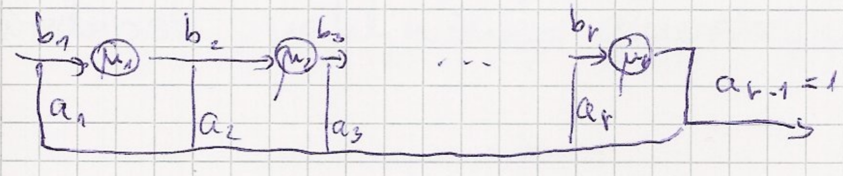


8 proc in 8 modulov



Verižna vezava strežnikov

strežniki tipa M



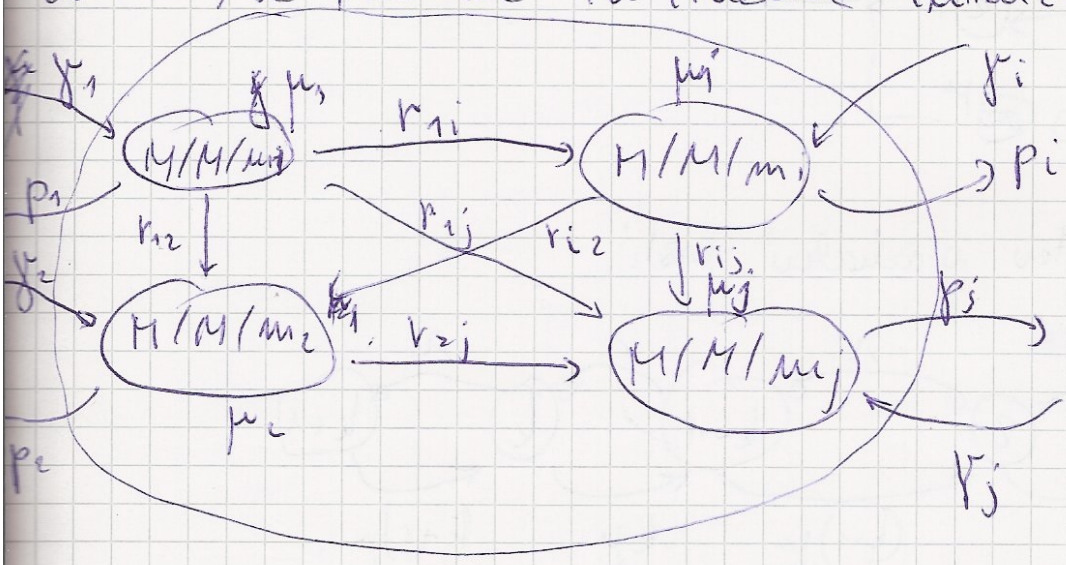
gostota verjetnosti

$$B(s) = a_1 + \sum_{i=1}^{r} a_{i+1} \prod_{j=1}^{i} b_j \frac{\mu_j}{s+\mu_j}$$

Strežniki so eksponentni

Zaprta strežna mreža

če so vse prihodne in izhodne intenzivnosti enake 0



N strežnih enot z intenzivnostjo μ_i

intenzivnost porojevanja λ_i

verjetnost prehoda r_{ij} iz i v j

da zahteva iz enote i zapusti mrežo je

$$p_i = 1 - \sum_{j=1}^{N} r_{ij}$$

prihajanje zahtev v enoto i

$$\lambda_i = \gamma_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j r_{ji}$$

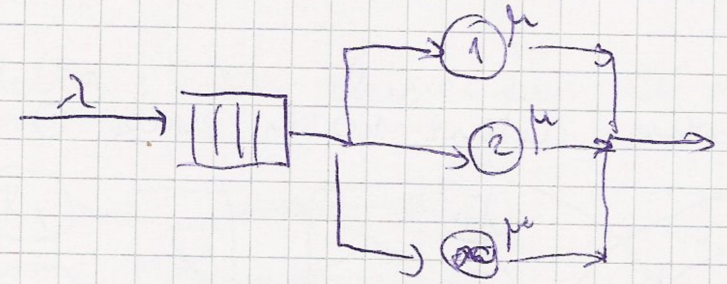
da je ergodičen

$$\lambda_i < m_i \mu_i$$

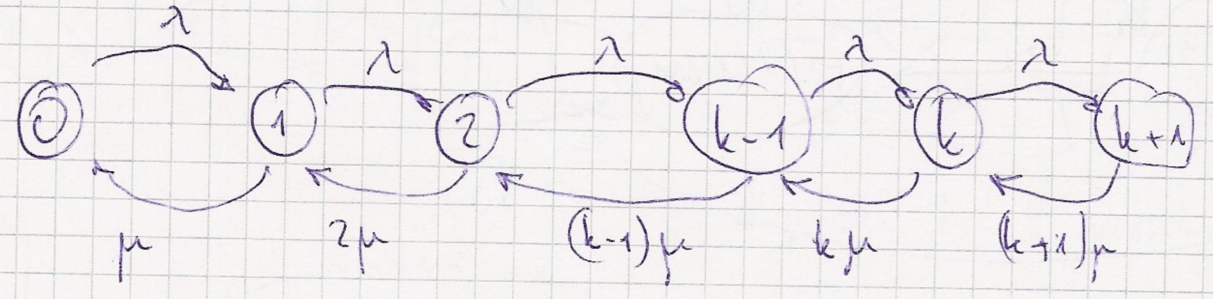
M / M / ∞

$\lambda_k = \lambda \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$

$\mu_k = k \cdot \mu \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$



$T = \frac{1}{\mu}$ ni zahtev v čakalni vrsti



$\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu}$ podobno omahljivim strežnim sistemom

Kako v simulacijah predstavimo naključen čas?

$u = 1 - e^{-\lambda t}$ izpostavimo t in za u vstavljamo vrednosti naključnega generatorja med 0 in 1