1. izpit iz Diskretnih struktur – UNI (novi program)
Ljubljana, 21. januar 2005
Naloge z rešitvami

1. Dana je štirimestna izjavna povezava

$$A(p,q,r,s) \;\sim\; p \wedge q \Rightarrow \neg r \vee \neg s\,.$$

   (a) Poenostavi izraz $A(p,p,q,q)$.

   Rešitev. $A(p,p,q,q) \sim \neg p \vee \neg q \sim \neg(p \wedge q) \sim p \uparrow q$. Komentar: že $\{A\}$ je poln nabor.

   (b) Katere izmed logičnih izrazov $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$ lahko izraziš zgolj s povezavo A ?

   Rešitev. Iz prejšnje točke (polnost nabora $\{A\}$) sledi da, lahko vse izraze izrazimo z A. Za nejeverne Tomaže:

$$\begin{aligned}
&\neg p \sim A(p,p,p,p),\\
&p \vee q \sim A(\neg p,\neg p,\neg q,\neg q) \sim A(A(p,p,p,p),A(p,p,p,p),A(q,q,q,q),A(q,q,q,q)),\\
&p \wedge q \sim \neg(\neg(p \wedge q)) \sim A(A(p,p,q,q),A(p,p,q,q),A(p,p,q,q),A(p,p,q,q))\,.
\end{aligned}$$

   (c) Ali je nabor $\{A,0\}$ poln.

   Rešitev. Ker je $\{A\}$ poln, je tudi $\{A,0\}$ poln.

   (d) Za poljuben $n \geq 1$ definiramo dvomestno izjavno povezavo $A_n(p,q) \sim A(A_{n-1}(p,q),1,1,p)$, pri čemer je $A_0 \sim p \Rightarrow q$.
   Izračunaj A_{2005}.

   Rešitev. Izračunamo $A(x,1,1,p) \sim \neg x \vee \neg p$. S pomočjo tega rezultata dobimo

$$\begin{aligned}
&A_0(p,q) \sim p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q,\\
&A_1(p,q) \sim \neg p \vee \neg q,\\
&A_2(p,q) \sim \neg p \vee q \sim A_0(p,q).
\end{aligned}$$

   Zato: $A_n(p,q) \sim A_{n-2}(p,q)$ za $n \geq 2$ in $A_{2005}(p,q) \sim A_1(p,q) \sim \neg p \vee \neg q$.

2. Ali je naslednji sklep pravilen ali napačen? Navedi dokaz ali poišči protiprimer.

$$u \Rightarrow w \vee p,\; t \Rightarrow u \wedge (p \Rightarrow s),\; \neg w \vee (s \wedge q),\; t \veebar s,\; p \Leftrightarrow u \veebar w \models t \vee q\,.$$

   Rešitev. Sklep je napačen; protiprimer je, na primer, $p = q = w = u = t = 0, s = 1$. Pri teh vrednostih so namreč vse predpostavke pravilne, zaključek pa napačen.

3. Poišči vse rešitve sistema enačb v $\mathbb{Z}_{20}$:

$$\begin{aligned}
4\,x + 4\,y &= 8\\
10\,x + 7\,y &= 5\,.
\end{aligned}$$

   Rešitev. 7 je edini obrnljivi element, 3 je njegov inverz; namreč $3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \pmod{20}$. Po množenju druge enačbe s 3 lahko izrazimo $y = 15 + 10x$, kar vstavimo v prvo enačbo. Dobimo enačbo $4x = 8$ v $\mathbb{Z}_{20}$, kar je ekvivalentno reševanju enačbe $x = 2$ v $\mathbb{Z}_5$. V $\mathbb{Z}_{20}$ dobimo potem štiri rešitve

$$x_1 = 2, x_2 = 2 + 5 = 7, x_3 = 2 + 10 = 12, x_4 = 2 + 15 = 17\,.$$

   Ustrezne vrednosti za y-e so

$$y_1 = 15, y_2 = 5, y_3 = 15, y_4 = 5\,.$$

4. Permutacija $\pi_n \in S_{2n}$ je dana s predpisom

$$\pi_n(2i) = 2(n-i)+1, \qquad \pi_n(2i-1) = 2i\,.$$

(a) Zapiši permutacije $\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ s cikli.

Rešitev.

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4\\ 2&3&4&1 \end{smallmatrix}\right) = (1\,2\,3\,4), && \text{(liha)}\\
\pi_3 &= \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6\\ 2&5&4&3&6&1 \end{smallmatrix}\right) = (1\,2\,5\,6)(3\,4), && \text{(soda)}\\
\pi_4 &= \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&7&4&5&6&3&8&1 \end{smallmatrix}\right) = (1\,2\,7\,8)(3\,4\,5\,6), && \text{(soda)}\\
\pi_5 &= \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\ 2&9&4&7&6&5&8&3&10&1 \end{smallmatrix}\right) = (1\,2\,9\,10)(3\,4\,7\,8)(5\,6). && \text{(liha)}
\end{aligned}$$

(b) Izračunaj π_5^{2005}.

Rešitev.

$$\pi_5^{2005} = (1\,2\,9\,10)^{2005}(3\,4\,7\,8)^{2005}(5\,6)^{2005} = (1\,2\,9\,10)(3\,4\,7\,8)(5\,6) = \pi_5\,.$$

(c) Določi parnost permutacije π_n.

Rešitev. Če je $n \equiv 0 \pmod 4$ ali $n \equiv 3 \pmod 4$, potem je permutacija π_n soda, če pa je $n \equiv 1 \pmod 4$ ali $n \equiv 2 \pmod 4$, je π_n liha.

Dokaz. Imamo $\left\lfloor \frac{2n}{4} \right\rfloor$ 4-ciklov in ($n \bmod 2$) transpozicij. Tako 4-cikli kot transpozicije so lihe permutacije. Zato je π_n soda natanko tedaj, ko je $\left\lfloor \frac{2n}{4} \right\rfloor + (n \bmod 2)$ sodo število. Parnost števila $\left\lfloor \frac{2n}{4} \right\rfloor + (n \bmod 2)$ določimo tako, da njegovo vrednost pogledamo pri n-jih ločeno po ostankih pri deljenju s 4.