1. izpit 1998/99

1. Določi najmanjšo podgrupo simetrične grupe S_4, ki vsebuje element

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Preveri ali držita sklepa:

   (a) $\neg p \vee q,\ \neg q \vee r,\ \neg\,(p \vee q \Rightarrow s)\ \vDash r \wedge s$

   (b) $p \vee q \Rightarrow r \wedge s,\ s \vee t \Rightarrow u\ \vDash p \Rightarrow u$

3. Naj bo $S = \{00001, 00002, 00003, \ldots, 09999, 10000\}$. Števili m in n iz množice S sta v relaciji R natanko tedaj, ko m lahko dobimo iz n tako, da spremenimo vrstni red cifer števila n. Recimo $(00131, 01301) \in R$ ali $(02543, 05423) \in R$.

   (a) Dokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

   (b) Določi ekvivalenčni razred števila 00324.

   (c) Na koliko ekvivalenčnih razredov nam razbije množico S relacija R.

4. Poišči kromatični polinom za graf:

   Na koliko načinov lahko pobarvamo graf G z desetimi barvami?

2. izpit 1998/99

1. Ali sta množici $[3, \infty)$ in $(-2, 2]$ enakomočni? Če sta, poišči bijekcijo med njima!

2. Dokaži veljavnost naslednjega sklepa:

$$\begin{aligned} &\forall x : (P(x) \Rightarrow \forall y : (Q(x) \Rightarrow R(x, y))) \\ &\exists x : (P(x) \wedge \exists y : \neg R(x, y)) \\ &\quad \vDash \exists x : \neg Q(x) \,. \end{aligned}$$

3. V množici pozitivnih racionalnih števil $\mathbb{Q}^+$ definiramo operacijo $*$ s predpisom $a * b = \frac{ab}{a+b}$. Kaj je $(\mathbb{Q}^+, *)$ kot algebrska struktura?

4. Induktivni razred $\mathcal{G}_n$ je podan z bazo in naslednjimi pravili:

   (a) Pokaži, da imajo vsi grafi iz razreda $\mathcal{G}_n$ sodo število točk!

   (b) Ali so vsi grafi iz razreda $\mathcal{G}_n$ ravninski?

   (c) Pokaži, da velja $n = 2(f - 2)$, če je n čtevilo točk grafa in f število območij na katera graf razreže ravnino!

3. izpit 1998/99

1. Preveri ali je graf Hamiltonski in določi njegovo kromatično število.
2. Pokaži, da sta množici $A = [0, 1) \cup (2, 3]$ in $B = (2, 3]$ enakomočni.
3. Pokaži, da je množica $I = [1, 2) \cap \mathbb{Q}$ z operacijo

$$x \oplus y = \begin{cases} xy; \; xy < 2 \\ \frac{1}{2}xy; \; xy \geq 2 \end{cases}$$

   Abelova grupa.

4. Induktivni razred grafov C_n je določen z bazo B in pravilom P.
   (a) Poičši povezavo med številom točk in številom povezav v vsakem grafu razreda C_n.
   (b) Ali je graf s slike element razreda C_n?

4. izpit 1998/99

1. Na množici $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je definirana operacija $*$ s predpisom:

$$(a,b) * (c,d) = \Big(a + (-1)^b\, c,\ b+d\Big)\,.$$

   Dokaži, da je $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$ nekomutativna grupa.

2. Dokaži veljavnost naslednjega sklepa:

$$\begin{aligned} &\exists x : P(x) \ \vee\ \exists x : Q(x) \\ &\forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x)) \\ &\quad \models \exists x : Q(x)\,. \end{aligned}$$

3. Nad abecedo $\Sigma = \{a,b,c\}$ sestavi induktivno definicijo za naslednji razred izjav: vsi nizi vsebujejo 1999 $a-$ jev in če niz vsebuje $n\ c - jev$, vsebuje $2n\ b - jev$.

4. Povezavi $e = uv$ in $f = u'v'$na grafu sta v relaciji Θ, če velja

$$d(u,u') + d(v,v') \neq d(u,v') + d(u',v)\,.$$

   (a) Zapiši katere povezave na ciklu C_5 so v relaciji Θ.
   (b) Ali je Θ tranzitivna relacija?
   (c) Poišči ekvivalenčne razrede relacije Θ^* na ciklu C_6.

5. izpit 1998/99

1. Induktivni razred $M \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je definiran takole:

$$
\begin{aligned}
&B.\ (0,0) \in M \\
&P_1.\ (i,j) \in M \Rightarrow (i+3, j-2) \in M \\
&P_2.\ (i,j) \in M \Rightarrow (i-2, j+3) \in M.
\end{aligned}
$$

   Ali sta elementa $(2,3)$ in $(3,2)$ iz M. Dokaži, da za vsako naravno število velja $(n,n) \in M$.

2. Preveri ali držita sklepa:

   (a) $p \vee r,\ p \Rightarrow q,\ r \Rightarrow s\ \models q \wedge s$

   (b) $p \vee q,\ \neg q,\ r \Rightarrow \neg p\ \models \neg r$

3. Na množici $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ imamo definirano relacijo

$$R = \{(a,e)\,,(b,a)\,,(b,c)\,,(b,f)\,,(c,d)\,,(d,e)\,.\,(f,e)\}\,.$$

   Poišči tranzitivno ovojnico R^* relacije R in pokaži, da je R^* Strogo delno urejena. Nariši še graf relacije R.

4. Ali sta grafa G in H :

   (a) Hamiltonska,

   (b) izomorfna?

6. izpit 1998/99

1. množici celih števil definiramo relacijo

$$R = \{(m,n)\,;\; mn > 0\} \cup \{(0,0)\}\,.$$

   Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in določi ekvivalentne razrede.

2. Prevedi naslednji besedili v izjavni račun in preveri resničnost sklepov:

   (a) študent, ki ima naslednji dan izpit, si reče: če bo jutri dež, bom naredil. Naslednji dan je lepo vreme. Ali to pomeni, da je študent padel na izpitu?

   (b) Računalničar, ki dobro obvlada teorijo, vedno naredi dober program. Dober program je lahko prodati. Torej: računalničar, ki ne proda svojega programa, ne obvlada dobro teorije.

3. Induktivni razred C_n nad abecedo $\Sigma = \{a,b\}$ je definiran z

$$\begin{aligned} B.&\ \lambda \in C_n \\ P_1.&\ x \in C_n \Rightarrow a^3x \in C_n \\ P_2.&\ x \in C_n \Rightarrow xb^3 \in C_n \\ P_3.&\ axb \in C_n \Rightarrow x \in C_n. \end{aligned}$$

   (a) Ali so nizi a^4b^7, $a^{1999}b$, b^{2000} iz razreda C_n?

   (b) Pokaži: če je $a^nb^m \in C_n$, je tudi $a^mb^n \in C_n$.

4. Za naslednji graf reši problem kitajskega poštarja z začetkom in koncem v a.

1. izpit 1999/00

1. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ je definirana relacija R s predpisom
$$mRn \iff (m \mid n) \vee (n \mid m)\,.$$
Preveri, ali je R ekvivalenčna relacija.

2. S pravilnostno tabelo preveri ali sta izjavi $p \wedge (q \vee r)$ in $\neg\,(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ enakovredni.

3. Za graf na sliki ugotovi:

   (a) Ali je Eulerjev?

   (b) Določi njegovo kromatično število!

   (c) Ali je graf ravninski?

4. Naj bo K konceptualen razred nad abecedo $\Sigma = \{a, b, c\}$, v katerem nastopa c natanko 2000 krat. Poišči induktivni razred C_n, ki je enak K in to tudi dokaži.

2. izpit 1999/00

1. Pokaži, da je množica $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, kjer so $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$ in $f_4(x) = -\frac{1}{x}$, grupa za kompozitum preslikav $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

2. V grafu G imamo točke $V_G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, povezave pa so definirane s predpisom
$$E_G = \{pq \mid p + q \text{ je praštevilo}\}.$$
Nariši graf G in preveri ali je Hamiltonov in ravninski.

3. Preveri veljavnost naslednjega sklepa:
$$p \Rightarrow q \vee r,\ q \Rightarrow \neg p,\ \neg(s \wedge r) \quad \models p \Rightarrow \neg s$$

4. Induktivni razred C_n je podan z bazo in pravili:
$$\begin{aligned}
B.&\ aba \in C_n \\
P_1.&\ xby \in C_n \Rightarrow xabya \in C_n \\
P_2.&\ xby \in C_n \Rightarrow xbya \in C_n \\
P_3.&\ xby,\ ybz \in C_n \Rightarrow xbz \in C_n \\
P_4.&\ xaabyaa \in C_n \Rightarrow xabya \in C_n \\
P_5.&\ xby,\ ybx \in C_n \Rightarrow xcy \in C_n.
\end{aligned}$$
   (a) Katere izmed besed a^2ba^4, a^3ba^2, aca in a^2ca^3 so iz C_n?
   (b) Pokaži, da je pravilo P_3 izpeljano iz ostalih pravil.

3. izpit 1999/00

1. Preveri ali veljata naslednja sklepa:

   (a) $p \vee q, \quad \neg p \vee r, \quad \neg r, \quad \models q,$

   (b) $p \Longleftrightarrow q, \quad q \Rightarrow r, \quad r \vee \neg s, \quad \neg s \Rightarrow q, \quad \models s.$

2. Določi podgrupo grupe S_4, ki jo generirata permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Poišči rešitev diferenčne enačbe

$$a_{n+2} - a_n = \cos \frac{\pi n}{2} + n2^n, \quad a_0 = 1, \ a_1 = 1.$$

4. Povezavi $e = uv$ in $f = u'v'$na grafu sta v relaciji Θ, če velja

$$d(u, u') + d(v, v') \neq d(u, v') + d(u', v).$$

   (a) Zapiši katere povezave na ciklu C_5 so v relaciji Θ.

   (b) Ali je Θ tranzitivna relacija?

   (c) Poišči ekvivalenčne razrede relacije Θ^* na ciklu C_6.

4. izpit 1999/00

1. Za poljubne množice A, B in D pokaži trditvi:

   (a) $A \subseteq B^C \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$,

   (b) $A \cap B \neq \emptyset \wedge B \backslash D = \emptyset \Rightarrow A \cap D \neq \emptyset$.

2. Poišči vse podgrupe grupe $(\mathbb{Z}_{60}, +_{60})$ in jih razvrsti v mrežo z relacijo $\subseteq$. Ali je ta mreža Boolova algebra?

3. Na množici celih števil je definirana relacija R s predpisom

$$aRb \Longleftrightarrow 5 \mid (3a + 2b)\,.$$

   Ali je R ekvivalenčna relacija? Če je, določi še ekvivalenčne razrede!

4. Ugotovi število točk in število povezav v polnem dvodelnem grafu K_{mn} in poišči vse polne dvodelne grafe, ki so regularni.

5. izpit 1999/00

1. Pokaži veljavnost naslednjega sklepa

$$\begin{aligned} &\forall x: \ (p(x) \vee q(x)) \\ &\forall x: \ [(\neg p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow r(x)] \\ &\quad \models \forall x: (\neg r(x) \Rightarrow p(x)). \end{aligned}$$

2. Nariši mrežo vseh deliteljev števila 315, če je

$$a \cap b = D(a,b) \text{ in } a \cup b = v(a,b).$$

   Ali je ta mreža lahko Boolova algebra?

3. Na množici $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ je definirana relacija R s predpisom

$$aRb \Longleftrightarrow a - b = 3k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

   Ali je R ekvivalenčna relacija? Če je, določi še ekvivalenčne razrede!

4. Preslikava $f : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ je definirana s predpisom

$$f((n,m)) = n +_4 m.$$

   Pokaži, da je f epimorfizem in določi $\ker f$.

6. izpit 1999/00

1. Preveri ali veljata naslednja sklepa:

   (a) $p \Rightarrow q \Rightarrow r, \quad p \vee s, \quad \neg s, \quad t \Rightarrow q, \quad \models \neg r \Rightarrow \neg t,$

   (b) $p, \quad p \Rightarrow r, \quad p \Rightarrow (q \vee \neg r)\,, \quad \neg s \vee \neg q, \quad \models s.$

2. Pokaži, da sta kroga z enačbama $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ in $x^2 + y^2 \leq 4$ enakomočna. (Poišči bijekcijo med njima.)

3. Poišči rešitev diferenčne enačbe

$$a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 7n^2 2^n, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2.$$

4. Pokaži, da ne obstoja regularen graf stopnje 3 na 7 točkah. Nariši še graf na 7 točkah z zaporedjem stopenj $(1,1,2,3,3,4,6)$.

1. izpit 2000/01

1. Kakšno strukturonam predstavlja množica matrik oblike

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix};\ a, b, c \in \mathbb{R},\ ac = 1 \right\}$$

   z operacijo množenja matrik?

2. Poišči rešitev diferenčne enačbe

$$a_{n+2} - 4a_n = 2 - 8n + 3^n,\ a_0 = 0,\ a_1 = 5.$$

3. Pokaži veljavnost naslednjega sklepa:

$$\begin{array}{l} \forall x : (p(x) \Rightarrow (q(x) \wedge r(x))) \\ \forall x : [p(x) \wedge s(x)] \\ \quad \vDash \forall x : (r(x) \wedge s(x)) . \end{array}$$

4. Na množici $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ je definirana relacija

$$R = \{(a, b), (a, e), (b, c), (b, e), (c, b), (d, a), (d, c), (f, e)\}.$$

   Opiši korake Floyd-Warschalovega algoritma in tudi izračunaj $\overline{R}$!

2. izpit 2000/01

1. Na množici

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \times \{0, 1, 2, \ldots, n\}\,,\ n \in \mathbb{N},$$

definiramo relacijo R s predpisom

$$(a, b)\, R\, (c, d) \Longleftrightarrow a - b > c - d.$$

Ali je R strogo delno ureja množico A? Poišči posebne elemente (minimalne in maksimalne ter prvega in zadnjega, če obstajajo).

2. Ali je grupa $(\mathbb{Z}_2, +_2) \times (\mathbb{Z}_4, +_4)$ izomorfna grupi $(\mathbb{Z}_8, +_8)$? (Namig: upoštevaj, da izomorfizem slika inverze v inverze.)

3. Množici točk

$$[a, b] = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\big\}$$

rečemo pravokotnik. Pokaži, da je množica pravokotnikov

$$P = \big\{[a, b]\,;\ a, b \in \mathbb{R}_0^+\big\}$$

za relacijo $\subseteq$ (vsebovanost množic) mreža. Kaj sta $\cap$ in $\cup$?

4. Za graf na sliki določi:

   (a) ali je Eulerjev,
   (b) ali je ravninski,
   (c) ali je Hamiltonov.

3. izpit 2000/01

1. Naj bo H podgrupa grupe G. Relacija $\sim$ na grupi G je definirana s predpisom $x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ za vsak $x, y \in G$. Pokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

2. Poišči rešitev diferenčne enačbe

$$a_{n+3} - 8a_n = 2^{n+1}n^2 + 2^n,\ a_0 = a_2 = a_4 = 0.$$

3. Preveri veljavnost naslednjega sklepa:

$$\begin{aligned} \forall x : (p\,(x) \Rightarrow \forall y : (q\,(y) \Rightarrow r\,(x,y))) \\ \neg\forall x : [p\,(x) \Rightarrow \forall y : r\,(x,y)] \\ \models \neg\forall x : q\,(x)\,. \end{aligned}$$

4. Danemu besedilu T priredimo graf $G = (V, E)$ na naslednji način:

$$\begin{aligned} V &= \{t\,;\ \text{črka } t \text{ nastopa v besedilu } T\} \\ E &= \{(u,v);\ \text{črki } u \text{ in } v \text{ sta sosedi v besedilu } T\}, \end{aligned}$$

če ne upoštevamo presledkov in ločil. Za besedilo FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO nariši graf in preveri ali je ravninski in Eulerjev.

4. izpit 2000/01

1. Pitagorejsko seštevanje je definirano z operacijo $a \ddagger b = \sqrt{a^2 + b^2}$. Kaj je $(\mathbb{R}_0^+, \ddagger)$ kot algeberska struktura?

2. Naj bo n naravno število. Na množici $A = \{0, 1, \ldots, n\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$ definiramo relacijo R s predpisom

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + b > c + d.$$

   (a) Ali je relacija R strogo delno ureja množico A?

   (b) Ali je R sovisna?

   (c) Poišči R-minimalne in R-maksimalne elemente.

3. Prevedi v izjavni račun naslednji pogovor, ki je (baje) potekal med očetom in sinom v antični Grčiji in preveri ali sta sklepa pravilna.

   Oče:"Če boš pošten, ti bodo nasprotovali bogati in močni. Če boš lagal, ti bodo nasprotovali preprosti ljudje. Lahko si le ali poštenjak ali lažnivec. Torej: ali ti bodo nasprotovali bogati in močni, ali pa preprosti ljudje."

   Sin:"Če bom poštenjak, me bo podpiralo ljudstvo. Če bom lažnivec, me bodo podpirali bogati in močni. Ker sem lahko ali lažnivec ali poštenjak, me bodo podpirali ali bogati in močni, ali pa preprosto ljudstvo."

4. Povezavi $e = uv$ in $f = u'v'$na grafu sta v relaciji Θ, če velja

$$d(u, u') + d(v, v') \neq d(u, v') + d(u', v).$$

   (a) Zapiši katere povezave na ciklu C_5 so v relaciji Θ.

   (b) Ali je Θ tranzitivna relacija?

   (c) Poišči ekvivalenčne razrede relacije Θ^* na grafu hiša na sliki:

5. izpit 1999/00

1. Kaj predstavlja množica

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q},\ ad \neq bc \right\}$$

   z operacijo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + cq & bp + dq \\ ar + cs & br + ds \end{bmatrix}$$

   kot algeberska struktura?

2. Točki na grafu, ki ima stopnjo ena, rečemo list, vsem preostalim točkam pa notranje točke. Razred grafov T sestavljajo vsa drevesa, v katerih imajo vse notranje točke stopnjo tri.

   (a) Pokaži, da je za grafe iz razreda T število listov za 2 večje od števila notranjih točk.

   (b) Nariši vse neizomorfne grafe razreda T na 12 točkah.

   (c) Ali obstaja drevo iz T na 13 točkah?

3. Reši diferenčno enačbo

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 4a_n - 4a_{n-1} = 2^n + \cos\frac{\pi n}{3},\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2.$$

4. Skiciraj množici

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \vee (3 \leq x \leq 4 \wedge -2 \leq y \leq 0)\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y+4)^2 \leq 1 \vee (-1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1)\}$$

   in pokaži, da sta enakomočni.

6. izpit 2000/01

1. V grupi $G = (A, \star)$ izberemo poljuben element $q \in A$ in definiramo grupoid $H = (A, \diamond)$ z operacijo $a \diamond b = a \star q \star b$.

   (a) Pokaži, da je tudi H grupa.

   (b) Pokaži, da je preslikava $f : a \mapsto a \star q^{-1}$ izomorfizem grup G in H.

2. Graf $K_{k,m,n}$, $k \geq m \geq n \geq 1$ je sestavljen iz treh disjunktnih množic točk s k, m in n elementi ter vseh povezav med točkami iz različnih množic.

   (a) Nariši $K_{2,2,3}$. Ali je ravninski?

   (b) Za katere vrednosti k, m in n je graf $K_{k,m,n}$ Eulerjev?

3. Na množici $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ je definirana relacija

   $$R = \{(a, e), (b, a), (b, c), (b, f), (c, d), (d, e), (f, e)\}.$$

   Z Floyd-Warschalovim algoritmom (korake utemelji) poišči tranzitivno ovojnico $\overline{R}$ in pokaži, da je $\overline{R}$ strogo delno urejena.

   (a) Dokaži pravilnost sklepa:

   $$p \vee q,\ (\neg p \wedge q) \Rightarrow r \quad \models \neg r \Rightarrow p.$$

   (b) Preveri ali je naslednja izjava tavtologija:

   $$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r).$$

1. izpit 2001/02

1. Vsako naravno število n lahko (na en sam način) zapišemo v obliki

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i},$$

kjer so $p_1 < p_2 < \dots < p_i$ praštevila in $a_1, a_2, \dots, a_i$ naravna števila. S pomočjo tega zapisa priredimo vsakemu naravnemu številu n dve zaporedji:

$$a(n) = (a_1, a_2, \dots, a_i, 0, 0, \dots) \quad \text{in } p(n) = (p_1, p_2, \dots, p_i, 0, 0, \dots).$$

Na množici naravnih števil definiramo relaciji A in P takole:

$$mAn \Leftrightarrow a(m) = a(n) \text{ in } mPn \Leftrightarrow p(m) = p(n).$$

(a) Opiši relacijo $A * P$.

(b) Katere izmed relacij $A, P, A * P$ so ekvivalenčne?

2. Določi grupi, ki ju generirata permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ali sta grupi izomorfni?

3. Reši diferenčno enačbo

$$2a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 3n^2 + 2n + 4 \sin \frac{\pi n}{3}, \; a_0 = 1, \; a_1 = -1.$$

4. Dokaži ali ovrži naslednja sklepa:

(a) $p \vee q, \; \neg p, \; \neg q \vee r, \; s \Rightarrow \neg r \quad \models \neg s.$

(b) $\forall x : (p(x) \wedge q(x)), \; \exists x : (p(x) \Rightarrow (r(x) \wedge q(x))), \; \forall x : \neg s(x), \; \forall x : (r(x) \Rightarrow (s(x) \vee t(x))) \quad \models \exists x : t(x).$

2. izpit 2001/02

1. Pokaži, da množica preslikav oblike

$$f(x) = ax + b,\ a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R}$$

sestavlja grupo za kompozitum funkcij $\circ$. Ali je to Abelova grupa?

2. Naj bo $f : A \to B$ surjektivna funkcija. Na A definiramo relacijo $\sim$ s formulo

$$a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)\,.$$

Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in ugotovi kaj so ekvivalenčni razredi. Kdaj je ekvivalenčnih razredov končno in kdaj števno mnogo.

3. Dokaži ali ovrži naslednja sklepa:

   (a) $p \Rightarrow (r \wedge q),\ r \Rightarrow (s \vee t),\ \neg s,\ p \wedge q \quad \models t.$

   (b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r),\ \neg p \Rightarrow \neg q,\ p \quad \models r.$

4. Za graf na sliki preveri ali je:

   (a) Eulerjev,

   (b) Hamiltonov,

   (c) ravninski.

3. izpit 2001/02

1. Podana je množica
$$A = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q},\, a^2 + b^2 \neq 0\}$$
in operacija $*$
$$(a,b) * (c,d) = (ac - 5bd, bc + ad).$$
Ali je $(A,*)$ grupa?

   [Rešitev: Je grupa. Pri notranjosti operacije je treba paziti na dodaten pogoj! Asociativnost je rutinsko delo. Enota $e = (1,0)$ in inverz $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+5b^2}, \frac{-b}{a^2+5b^2}\right)$.]

2. Na realnih številih je definirana relacija $\sim$:
$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}.$$
Pokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in opiši ekvivalenčne razrede.

   [Rešitev: Zlahka se pokaže, da relacija je ekvivalenčna. Ekvivalenčni razredi so: $[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x - k, k \in \mathbb{Z}\}$ za vsak $x \in [0,1)$.]

3. Poišči rešitev linearne kongurence $29x \equiv 5 \bmod 385$ na dva načina:

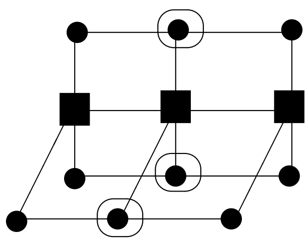
   (a) direktno;

   (b) s pomočjo Kitajskega izreka o ostankih.

   [Rešitev: $x \equiv 40 \bmod 385$. V (b) primeru je potrebno razbiti 385 na prastevila.]

4. Podana sta grafa $G = (V(G), E(G))$ in $H = (V(H), E(H))$. Kartezični produkt $G \square H$ je graf z $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$. Točki (x,y) in (a,b) tvorita povezavo v $G \square H$, če velja $x = a$ in $yb \in E(H)$ ali $xa \in E(G)$ in $y = b$. Nariši graf $P_3 \square K_{1,3}$ in ugotovi ali je ravninski.

   [Rešitev: Graf je na sliki, označene točke tvorijo subdivizijo $K_{3,3}$, tako da ni ravninski.]



4. izpit 2001/02

1. Po Sahari gre karavana sestavljena iz n kamel. Na koliko načinov se lahko po počitku v oazi razporedijo tako, da nobena kamela ne hodi za isto kamelo kot je hodila pred počitkom? Naredi še poseben primer za $n = 4$.

   [Rešitev: Vseh razvrstitev je $n!$. Razvrstitev, kjer vsaj ena kamela hodi za isto kot prej, je $\binom{n-1}{1}(n-1)!$–binomski simbol nam pove na koliko načinov lahko izberemo to eno kamelo iz $n-1$ kamel (prva od prej ne more hoditi za isto kot prej!!!), $(n-1)!$ pa nam pove na koliko načinov jih lahko razporedimo v vrsto. Podobno nadaljujemo: za vsaj dve kameli za istimi kot prej je $\binom{n-1}{2}(n-2)!$ in tako naprej. Po načelu vključitev in izključitev dobimo $\# = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1! = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!$. V primeru, ko je $n = 4$ je $\# = 11$.]

2. Z matriko A zakodiraj po modulu 26 besedno zvezo VLAK JE ODPELJAL, če je matrika

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

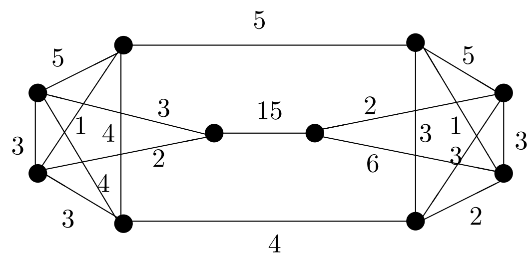
   Odkoriraj še niz HGMD.

   [Rešitev: $A = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, zakodirani niz je JFNKMFUKBTC AFDN, odkodirana beseda je TEMA.]

3. Določi vse podgrupe grupe $\mathbb{Z}_{105}$ ter jih razvrsti v mrežo. Ali je dobljena mreža Boolova algebra?

   [Rešitev: Podgrup je osem: $\mathbb{Z}_{105}$, $\{0\}$, $\langle 3\rangle_{105}$, $\langle 5\rangle_{105}$, $\langle 7\rangle_{105}$, $\langle 15\rangle_{105}$, $\langle 21\rangle_{105}$, $\langle 35\rangle_{105}$, kjer množica $\langle a\rangle_b$ predstavlja vse večkratnike števila a po modulu b. Mreža je 3-kocka, kar je seveda Boolova algebra.]

4. Reši Kitajski problem poštarja za graf na sliki!



   [Rešitev: V grafu sta dve točki lihe stopnje, tako da moramo poiskati pot med njima, ki porabi najmanjšo vrednost. Obstajata dve poti med njima z vrednostjo 14. Eno izmed teh dveh je treba preoditi dvakrat. Skupen seštevek je 89.]

4. izpit 2001/02

1. Poišči vse celoštevilske rešitve sistema kongurenc

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \bmod 3 \\ x &\equiv 3 \bmod 4 \\ x &\equiv 4 \bmod 5 \\ x &\equiv 6 \bmod 7. \end{aligned}$$

   [Rešitev: $x \equiv -1 \bmod 420$.]

2. Reši diferenčno enačbo

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 3n + 2^n, \; a_0 = a_1 = 0.$$

   [Rešitev: $a_n = \frac{-7+6\sqrt{3}}{12}(2+\sqrt{3})^n - \frac{7+6\sqrt{3}}{12}(2-\sqrt{3})^n - \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{2^n}{3}$.]

3. Naj bosta $\sim_1$ in $\sim_2$ ekvivalenčni relaciji na množici X.

   (a) Ugotovi, ali je relacija R definirana s predpisom

$$\forall x, y \in X, \; xRy \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x \sim_1 y) \vee (x \sim_2 y)$$

   ekvivalenčna relacija na X!
   [Rešitev: R ni tranzitivna in ni ekvivalenčna relacija.]

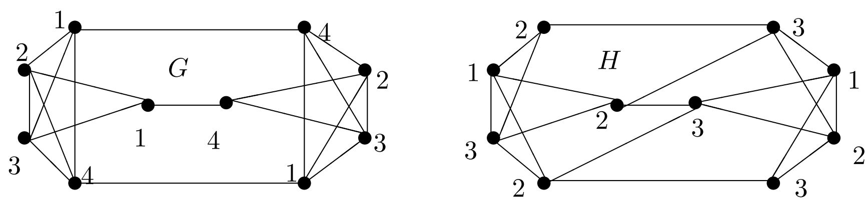
   (b) Ugotovi, ali je relacija S definirana s predpisom

$$\forall x, y \in X, \; xSy \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x \sim_1 y) \wedge (x \sim_2 y)$$

   ekvivalenčna relacija na X!
   [Rešitev: S je ekvivalenčna relacija.]

4. Ali sta grafa G in H na sliki izomorfna? Določi še njuni kromatični števili.

   [Rešitev: $\chi(G) = 4$ in $\chi(H) = 3$, saj sta barvanji vidni na sliki, hkrati pa G vsebuje podgraf K_4 in H vsebuje podgraf K_3. Grafa nista izomorfna, saj imata različni kromatični števili. (Ali točki stopnje 3 v G sta sosedi, medtem ko točki stopnje 3 v H nista sosedi in še kak razlog bi se našel.)]



6. izpit 2001/02

1. Na množici $[1,3] \times [2,5]$ definiramo relacijo $\preceq$ s predpisom

$$(x,y) \preceq (a,b) \overset{def}{\Longleftrightarrow} x < a \vee (x = a \wedge y \leq b).$$

Pokaži, da je $\preceq$ linearna ureditev (ki ji pravimo leksikografska). Ali $\preceq$ linearno ureja celo ravnino $\mathbb{R}^2$?

[Rešitev: Relacija je linearna na $[1,3] \times [2,5]$ in tudi na $\mathbb{R}^2$. V dokazu je treba upostevati distributivnost logicnih operatorjev 'in': $\wedge$ in 'ali' $\vee$.]

2. V ravnini imamo 6 točk (A, B, C, D, E, F) od katerih nobena trojica ne leži na isti premici.

   (a) Koliko premic določajo?
   (b) Koliko trikotnikov določajo?
   (c) Koliko trikotnikov s stranico CE določajo?
   (d) Koliko trikotnikov z ogliščem C določajo?

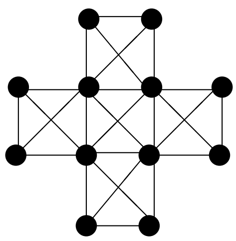
[Rešitev: 15, 20, 4 in 10.]

3. Na množici $\mathbb{N}_0$ definiramo binarno operacijo $*$ s predpisom $a * b = D(a,b)$, pri čemer je $D(0,0) = 0$ in $D(a,0) = a$. Ugotovi, kaj je $(\mathbb{N}_0, *)$ kot algeberska struktura. Kaj pa $(\mathbb{N}, *)$? Ali imata strukturi absorpcijski element?

[Rešitev: $(\mathbb{N}_0, *)$ je komutativni monoid (enota je 0) in $(\mathbb{N}, *)$ je komutativna polgrupa. V obeh primerih je absorpcijski element 1.]

4. Ugotovi ali je graf na sliki ravninski in ugotovi njegovo kromatično število.

[Rešitev: Graf zlahka pobarvamo s 4 barvami in vsebuje K_4 kot podgraf. Torej je $\chi(G) = 4$. Graf je ravninski-iz vsakega K_4 'vzemi' eno diagonalo in jo narisi 'okoli'.]



1. izpit 2002/03

1. Podani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = (1\,2\,3\,4)\,.$$

   Poišči podgrupi v S_6 generirani z α in z β. Ali sta podgrupi izomorfni? [Rešitev: $G = (id, \alpha, \alpha^2)$ in $H = (id, \beta, \beta^2, \beta^3)$. Nista izomorfni, saj imata različno število elementov.]

2. Reši diferenčno enačbo

   $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 1 + 6n - 2n^2,\ a_0 = 2$ in $a_1 = 4$.[Rešitev:$a_n = 2^n + 3^n - n^2$.]

3. Množici točk $[a, b]$ rečemo pravokotnik. Pokaži, da je množica pravokotnikov P za relacijo $\subseteq$ (vsebovanost množic) mreža.

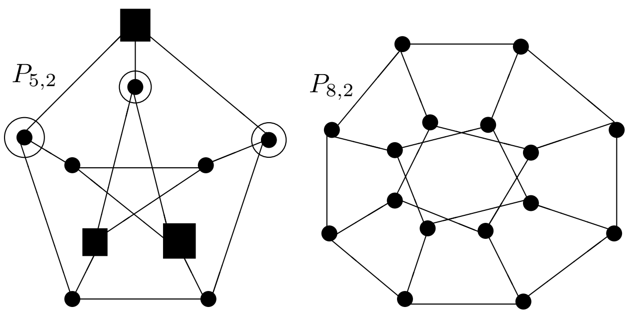
$$[a, b] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\right\}, P = \left\{[a, b]\,;\ a, b \in \mathbb{R}_0^+\right\}$$

   Kaj sta $\cap$ in $\cup$? Ali obstajata prvi in zadnji element? [Rešitev: Zlahka se preveri, da je P delno urejena množica; $[a, b] \cap [c, d] = [\min\{a, c\}, \min\{b, d\}]$ in $[a, b] \cup [c, d] = [\max\{a, c\}, \max\{b, d\}]$; prvi element je $[0, 0]$, zadnjega pa mreža nima.]

4. Posplošen Petersenov graf $P_{n,k}$ je definiran z

$$V(P_{n,k}) = \{u_i, v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}, E(P_{n,k}) \quad = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}.$$

   Nariši grafa $P_{5,2}$ in $P_{8,2}$ ter preveri ali sta ravninska. [Namig: točke u_i naj bodo razporejene po zunanji krožnici, točke v_i pa po notranji.] [Rešitev: $P_{5,2}$ ni ravninski (označene točke tvorijo subdivizijo $K_{3,3}$); $P_{2,8}$ je ravninski (štiri v-je narišeš zunaj okoli).]



2. izpit 2002/03

1. Sod z volumnom 500 litrov polnimo z 12 oziroma 14 literskimi vedri. Na koliko načinov lahko napolnimo sod, če napolnitev pomeni kolikokrat smo uporabili 12 litersko in kolikokrat 14 litersko vedro? V sod vedno zlijemo polno vedro. Vode iz soda ne zajemamo.

   [Rešitev: na 6 načinov in sicer $(2, 34)$, $(9, 28)$, $(16, 22)$, $(23, 16)$, $(30, 10)$ in $(37, 4)$, pri čemer prvo število pove kolikokrat smo zajeli z 12 litrskim vedrom in drugo s 14 literskim vedrom.]

2. Pokaži, da je množica matrik

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ac = 1 \right\}$$

   grupa z operacijo množenja matrik. Ali je še vedno grupa, če spremenimo pogoj $ac = 1$ v $ac = 2$?

   [Rešitev: če upoštevamo lastnosti matrik, zlahka pokažemo, da je grupa. Ni pa več grupa s spremenjenim pogojem—nimamo več notranjosti operacije.]

3. Na točkah ravnine $\mathbb{R}^2$ definiramo relacijo $\preccurlyeq$ s predpisom:

$$(x, y) \preccurlyeq (a, b) \overset{def.}{\iff} x < a \vee y \leq b.$$

   Ali relacija $\preccurlyeq$ delno ureja ravnino $\mathbb{R}^2$? Ali je relacija $\preccurlyeq$ strogo sovisna?

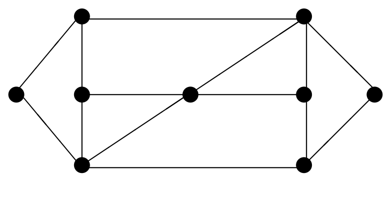
   [Rešitev: $\preccurlyeq$ ne ureja delno ravnine, je pa strogo sovisna.]

4. Za graf na sliki preveri ali je

   (a) Eulerjev ali semi-Eulerjev? [Rešitev: ima štiri točke lihe stopnje (b, c, g, h) in ni Eulerjev niti semi-Eulerjev.]

   (b) Hamiltonov ali semi-Hamiltonov? [Rešitev: obhod se zlahka najde—G je Hamiltonov in semi-Hamiltonov]

   (c) določi njegovo kromatično število! [Rešitev: $\lambda(G) = 3$—zlahka ga pobarvamo s tremi barvami $\lambda(G) \leq 3$, vsebuje pa trikotnik $\lambda(G) \geq 3$.]



3. izpit 2002/03

1. Opiši korake Warshallovega algoritma na množici $\{a, b, c, d, e, f\}$ za relacijo

$$R = \{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c), (f, a), (f, f)\}.$$

   Ali je dobljena tranzitivna ovojnica R^* tudi ekvivalenčna relacija?

   [Rešitev: Relaciji R se do R^* dodajo le še pari $(b, b), (c, b), (c, c)$ in (e, e); ni ekvivalenčna, saj ni refleksivna (na diagonali so tudi ničle) in ni simaetrična.]

2. Na koliko načinov lahko izberemo 9 žog s kupa rdečih, modrih in zelenih žog, če:

   (a) ni omejitev; [Rešitev: 55.]

   (b) moramo vzeti vsaj 4 zelene žoge; [Rešitev: 21.]

   (c) lahko vzamemo največ 3 modre žoge. [Rešitev: 34.]

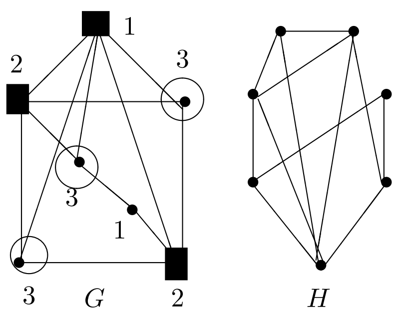
3. Reši sistem kongruenčnih enačb

$$\begin{aligned} 11x &\equiv 3 \pmod{26} \\ 13x &\equiv 4 \pmod{33} \\ 17x &\equiv 5 \pmod{35}. \end{aligned}$$

   [Rešitev: $x \equiv 25225 \pmod{30030}$.]

4. Na sliki sta grafa G in H. Ali sta izomorfna? Ali je G ravninski? Določi še kromatično število $\chi(G)$!

   [Rešitev: G in H nista izomorfna (edina točka stopnje 2 v H ima oba soseda stopnje 3, medtem ko ima v G enega soseda stopnje 3 in enega stopnje 4); G ni ravninski-vsebuje subdivizijo $K_{3,3}$; $\chi(G) = 3$-vsebuje trikotnik, 3-barvanje pa označujejo števila na sliki.]



4. izpit 2002/03

1. G je povezan graf brez ciklov, v katerem so samo točke stopnje 1, stopnje 3 in stopnje 4. Točk stopnje 1 je 12, število točk stopnje 3 pa je tri krat večje kot število točk stopnje 4. Koliko točk premore graf G? Nariši še kak tak graf!

   [Rešitev: točk je 20, teh grafov je več-na primer poti na osmih točkah dodamo po tri liste (točke stopnje ena) na začetku in koncu te poti, vsem vmesnim točkam na poti pa po en list.]

2. Reši diferenčno enačbo

$$a_{n+1} - 4a_n - 12a_{n-1} = (n+2)6^n, a_0 = 1, a_1 = 0.$$

   [Rešitev: $a_n = \left(\frac{5}{128} + \frac{7}{32}n + \frac{1}{16}n^2\right) 6^n + \frac{123}{128}(-2)^n$.]

3. Naj bo $A = \{1, 2, \ldots, 50\}$. Števili $x = x_1x_2$ in $y = y_1y_2$ iz množice A sta v relaciji R,če je absolutna vrednost razlike njunih števk enaka:

$$xRy \Longleftrightarrow |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|.$$

   Preveri ali je R ekvivalenčna relacija. Če je, določi še ekvivalenčne razrede.

   [Rešitev: R je ekvivalenčna; ekvivalenčni razredi: $[1] = \{01, 10, 12, 21, 23, 32, 34, 43, 45\}$, $[2] = \{02, 13, 20, 24, 31, 35, 42, 46\}$, $[3] = \{03, 14, 25, 30, 36, 41, 47\}$, $[4] = \{04, 15, 26, 37, 40, 48\}$, $[5] = \{05, 16, 27, 38, 49, 50\}$, $[6] = \{06, 17, 28, 39\}$, $[7] = \{07, 18, 29\}$, $[8] = \{08, 19\}$, $[9] = \{09\}$ in $[11] = \{11, 22, 33, 44\}$.]

4. Naj bo $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x \neq 1\}$. Na množici G definiramo operacijo $*$ s predpisom $a * b = a^{\ln b}$ za $a, b \in G$. Pokaži, da je $(G, *)$ Abelova grupa!

   [Rešitev: je Abelova grupa.]

5. izpit 2002/03

1. Na koliko načinov lahko sestaviš ogrlico iz 5 rdečih, 3 modrih, 2 zelenih in 1 črne kroglice?

   [Rešitev: 1260. Za oglico postavljamo kroglice v krog, zato je potrebno eno kroglico fiksirat-najbolje črno (ker je samo ena). Ostale postavimo v vrsto na $\frac{10!}{5!3!2!}$. To število še delimo z 2, saj lahko verižico obračamo. Ni pa potrebno ničesar prištet, saj ni med postavitvami v vrsto nobenega 'palindroma'.]

2. Reši sistem kongruenčnih enačb

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 3 (\operatorname{mod} 10) \\
x &\equiv 13 (\operatorname{mod} 11) \\
x &\equiv 15 (\operatorname{mod} 17).
\end{aligned}
$$

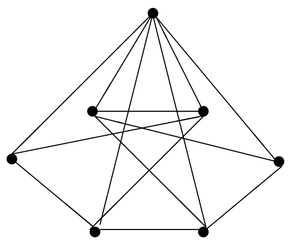
   [Rešitev: $x \equiv 1443 (\operatorname{mod} 1870)$.]

3. Naj bo $(G, *)$ grupa in $A = \{x*y*x^{-1}*y^{-1} \mid x, y \in G\}$ njena podmnožica. Pokaži, da je $(G, *)$ Abelova natanko takrat, ko množica A vsebuje le enoto grupe $(G, *)$.

   [Rešitev: trditev drži. Če je G Abelova, je seveda $x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$, saj elementi komutirajo. Če je $A = \{e\}$ potem $x * y * x^{-1} * y^{-1} = e$ 'pomnožimo' iz desne z y in nato z x in imamo komutativnost.]

4. Za graf G na sliki preveri ali je ravninski, Hamiltonov, Eulerjev ali poleulerjev. Določi še njegovo kromatično število $\chi(G)$!

   [Rešitev: G je ravninski (le zamenjaj notranji točki), ni Eulerjev, je poleulerjev in je Hamiltonov. $\chi(G) = 4$.]



6. izpit 2002/03

1. Podana sta grafa $G = (V(G), E(G))$ in $H = (V(H), E(H))$. Krepki produkt $G \boxtimes H$ je graf z $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$. Točki (x, y) in (a, b) tvorita povezavo v $G \boxtimes H$, če velja $x = a$ in $yb \in E(H)$ ali $xa \in E(G)$ in $y = b$ ali $xa \in E(G)$ in $yb \in E(H)$. Nariši graf $P_3 \boxtimes P_4$ in ugotovi ali je ravninski ter določi njegovo kromatično število.

   [Rešitev: graf je na spodnji sliki, ni ravninski (označene točke tvorijo subdivizijo K_5) in $\chi(G) = 4$.]

2. Reši diferenčno enačbo

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 5 \sin \frac{\pi n}{2}, a_0 = a_1 = 0.$$

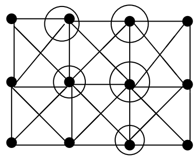
   [Rešitev: $a_n = \frac{5}{2}(-1)^n - (-2)^n + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{\pi n}{2}$.]

3. Poišči vse podgrupe $\mathbb{Z}_{390}$, jih uredi z relacijo $\subseteq$ in jih razvrsti v Hassejev diagram. Ali je to Boolova algebra?

   [Rešitev: podgrupe so: $\langle 0 \rangle, \langle 195 \rangle, \langle 78 \rangle, \langle 130 \rangle, \langle 65 \rangle, \langle 30 \rangle, \langle 39 \rangle, \langle 26 \rangle$, $\langle 15 \rangle, \langle 13 \rangle, \langle 10 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle$. To je Boolova algebra.]

4. Poišči tri taka zaporedna liha števila, da je prvo deljivo s 3^2, drugo s 5^2 in tretje s 7^2.

   [Rešitev: Imamo sistem $2x \equiv -1 (\text{mod } 9)$, $2x \equiv -3 (\text{mod } 25)$ in $2x \equiv -5 (\text{mod } 49)$, uporabimo Kitajski izrek o ostankih in dobimo $x \equiv 1787 (\text{mod } 10125)$. Torej so iskana števila 3573, 3575 in 3577.]



1. izpit 2003/04

1. Poišči vsa realna števila $a \in \mathbb{R}$, da bo $(\mathbb{R}\backslash\{a\}, *)$ Abelova grupa, če je $*$ definirana s predpisom $x * y = x + y + xy$ za $x, y \in \mathbb{R}$.

   [Rešitev: enota je 0, inverz pa za $a = -1$ ne obstaja. Torej je $a = -1$. Nato je potrebno preveriti še notranjost operacije v $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.]

2. Poišči rešitev diferenčne enačbe

   $$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 5 - 3n + 3^n,\ a_0 = 2,\ a_1 = 1.$$

   [Rešitev: $a_n = 2^n(2-n) - 1 - 3n + 3^n$.]

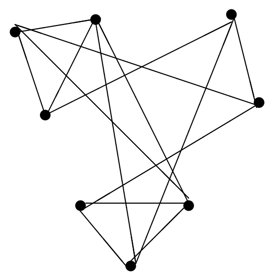
3. Če je sklep veljaven, sestavi dokaz, sicer navedi protiprimer:

   $$\neg p \vee r,\ r \wedge \neg t \Rightarrow p \wedge \neg r,\ t \uparrow \neg r \quad \models t \Longleftrightarrow r.$$

   [Rešitev: Sklep je veljaven. Ekvivalenco se razdeli na dve implikaciji, nato pa se vsaka dokaže s pomočjo pogojnega sklepa.]

4. Za graf G na sliki preveri ali je ravninski in ali je Hamiltonov, ter določi njegovo kromatično število $\chi(G)$!

   [Rešitev: je Hamiltonov; $\chi(G) = 3$ (G vsebuje trikotnik, po drugi strani pa ga lahko pobarvamo s tremi barvami); je ravninski (prenesi recimo zgornji levi točki po 'diagonali' in ju še zamenjaj med sabo).]



2. izpit 2003/04

1. Koliko različnih pozitivnih celoštevilskih rešitev ima enačba $x_1+x_2+x_3 = 13$ ob pogojih $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 7$ in $x_3 \leq 8$?

   [Rešitev: 29; če dovolimo še ničle pa 33.]

2. Naj bo $\sim$ relacija na $\mathbb{R}$ definirana s predpisom

   $$x \sim y \Longleftrightarrow \sin x - \sin y \in \mathbb{Z}.$$

   Pokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in opiši ekvivalenčna razreda od 0 in $\frac{\pi}{6}$.

   [Rešitev: je ekvivalenčna relacija $[0] = \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ in $[\frac{\pi}{6}] = \{(\frac{1}{6} + 2k)\pi, (\frac{5}{6} + 2k)\pi, (\frac{7}{6} + 2k)\pi, (\frac{11}{6} + 2k)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.]

3. Podani sta permutaciji

   $$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = (1,2,3,4)\,(7,5,8)\,.$$

   (a) Preveri ali α^{-1} in β komutirata.

   (b) Poišči podgrupo v S_8 generirano z α.

   [Rešitev: α^{-1} in β ne komutirata; $\langle\alpha\rangle = \{id, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5\}$.]

4. Na 4×4 šahovnici se lahko iz polj v kotih $(1, 4, 13, 16)$ premikamo v vsa sosednja polja, iz preostalih polj pa le diagonalno v sosednja polja. Nariši ustrezen graf in ugotovi ali je le ta Hamiltonov, polhamiltonov, Eulerjev ali poleulerjev!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

   [Rešitev: je Hamiltonov in polhamiltonov, ni Eulerjev in ni poleulerjev.]

3. izpit 2003/04

1. Poišči začetno nalogo $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$ diferenčne enačbe $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 5n2^n$.

   [Rešitev: $a_n = 7 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-2}(7 + \frac{5}{2}n + \frac{5}{2}n^2)$.]

2. Dokaži, da je množica realnih funkcij, ki jo generirata funkciji

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ in } g(x) = \frac{1}{1-x}.$$

   za operacijo kompozitum funkcij, tvori končno grupo. Kaj je enota te grupe?

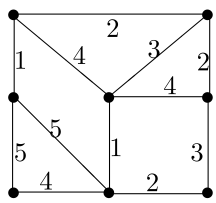
   [Rešitev: Enota je $id(x) = x$, $(f \circ f)(x) = x$, $(g \circ g)(x) = \frac{x-1}{x} = f_1$, $(g \circ f_1)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = \frac{x}{x-1} = f_2$ in $(f \circ g)(x) = 1 - x = f_3$. Vsi mešani kompozitumi nam dajo že kako izračunano funkcijo, tako da je $\langle f, g \rangle = \{id, f, g, f_1, f_2, f_3\}$.]

3. Zakodiraj besedo DANES z modulom $Q = 31$ in kodirnim številom $s = 7$, če imajo črke naše abecede vrednosti od 1 do 25, ostala mesta pa so $x = 26$, $y = 27$, $w = 28$, $q = 29$, $! = 30$ in presledek je 0. Določi še dekodirno število t ($ts \equiv 1 (\bmod \varphi(Q))$) in dekodiraj besedo BLJAK.

   [Rešitev: DANES$\rightarrow$DAVEF, $t = 13$ in BLJAK$\rightarrow$GJTAP.]

4. Poišči vsa minimalna vpeta drevesa za utežen graf na sliki.

   [Rešitev: Minimalni vpeti drevesi sta dve; obakrat so na drevesih obe povezavi z utežjo 1, vse povezave z utežjo 2, spodnja leva povezava z utežjo 4 in enkrat ena, drugič pa druga povezava z utežjo 3.]



4. izpit 2003/04

1. Poišči vse podgrupe grupe $\mathbb{Z}_{260}$ in jih razvrsti v mrežo z relacijo $\subseteq$. Ali je dobljena mreža Boolova algebra? Odgovor utemelji!

   [Rešitev: podgrupe so: $\mathbb{Z}_{260}$, $\langle 2\rangle$, $\langle 4\rangle$, $\langle 5\rangle$, $\langle 10\rangle$, $\langle 13\rangle$, $\langle 20\rangle$, $\langle 26\rangle$, $\langle 52\rangle$, $\langle 65\rangle$, $\langle 130\rangle$ in $\{0\}$. To ni Boolova algebra.]

2. Na neki osnovni šoli je vpisanih 57 prvošolcev. Na koliko načinov jih lahko razporedijo v razrede A, B in C, če mora biti v vsakem razredu

   (a) enako število učencev?
   [Rešitev: $\# = \frac{57!3!}{(19!)^3}$.]

   (b) vsaj 18 otrok?
   [Rešitev: $\# = \frac{57!3!}{(19!)^3} + \frac{57!3!}{(18!)^2 21!} + \frac{57!3!}{18!19!20!}$.]

3. Podan je sistem linearnih kongruenčnih enačb

$$
\begin{aligned}
x &\equiv a (\operatorname{mod} 15) \\
x &\equiv 4 (\operatorname{mod} 21) \\
x &\equiv 5 (\operatorname{mod} 11).
\end{aligned}
$$

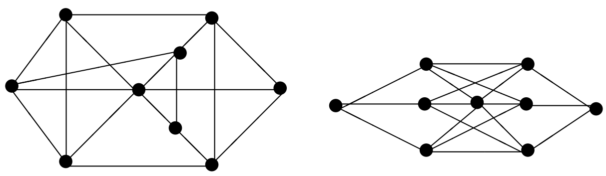
   (a) Izberi a tako, da bo sistem rešljiv in ga reši.
   [Rešitev: $a \equiv 4 (\operatorname{mod} 3)$; za $a = 4$, je rešitev $x \equiv 214 (\operatorname{mod} 1155)$.]

   (b) Izberi a tako, da sistem ni rešljiv. Zakaj obstoj takega a ni v nasprotju s Kitajskim izrekom o ostankih?

   [Rešitev: katerikoli drug a, recimo $a = 0$. Ker moduli niso paroma tuji ni v nasprotju s Kitajskim izrakom o ostankih.]

4. Ali sta grafa na sliki izmorfna? Ali sta Hamiltonova? Določi tudi njuni kromatiči števili!

   [Rešitev: Nista izomorfna, saj ima recimo v prvem grafu edina točka stočnje 6 dva soseda stopnje 3, medtem ko tega v drugem grafu ni. Sta Hamiltonova—zlahka se najde Hamiltonov cikel v obeh grafih.]



5. izpit 2003/04

1. Koliko rešitev ima enačba $x_1 + x_2 + x_3 = 19$, $x_i \in \mathbb{N}$, če

   (a) ni omejitev?

   (b) velja $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 4$ in $x_3 \geq 5$?

   (c) velja $x_1 \leq 8$, $x_2 \leq 8$ in $x_3 \leq 5$?

   [Rešitev: $\#_a = C(18, 16) = 153$, $\#_b = C(9, 7) = 36$ in $\#_c = 6$.]

2. Poišči vse celoštevilske rešitve sistema kongruenc

$$2x \equiv 7 (\bmod 5), 5x \equiv 2 (\bmod 11) \textbf{ in } 3x \equiv 1 (\bmod 13).$$

   [Rešitev: $x \equiv 711 (\bmod 715)$.]

3. Fibonaccijeva kocka je graf Γ_k, ki ima za točke nize ničel in enic dolžine k, v katerih ne smeta nastopati dve zaporedni enici; dve točki sta sosedi kadar se razlikujeta v natanko enem bitu.

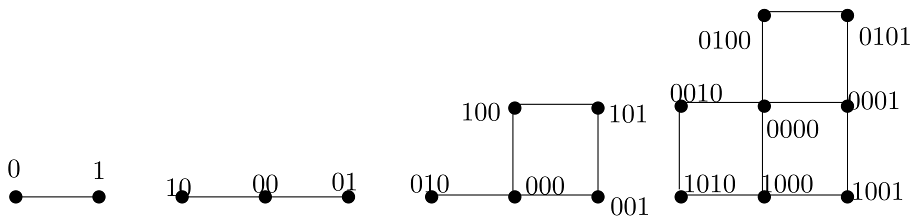
   (a) Nariši Γ_1, Γ_2, Γ_3 in Γ_4.

   (b) Izračunaj število točk grafa Γ_k. [Namig: poišči rekurzivno relacijo.]

   [Rešitev: glej sliko spodaj; rekurzija je $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ z začetnim pogojem $a_1 = 2$ in $a_2 = 3$ dobimo $a_n = \frac{1}{2^{n-1}5}\Big(\big(5+2\sqrt{5}\big)\big(1+\sqrt{5}\big)^{n-1} + \big(5-2\sqrt{5}\big)\big(1-\sqrt{5}\big)^{n-1}\Big)$.]

4. Števili a in b iz množice $A = \{n \in \mathbb{N} \,|10 < n \leq 16\}$ sta v relaciji R kadar je $a - b \equiv 2 (\bmod 3)$. Zapiši matriko relacije R in poišči njeno tranzitivno ovojnico $\overline{R}$.

   [Rešitev: $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $\overline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.]



6. izpit 2003/04

1. Poišči splošno rešitev diferenčne enačbe $a_{n+4} - 3a_{n+2} - 4a_n = 5n + 4^n$.

   [Rešitev: $a_n = C_1 2^n + C_2(-2)^n + C_3 \sin\frac{\pi n}{2} + C_4 \cos\frac{\pi n}{2} - \frac{5}{6}n + \frac{5}{18} + \frac{1}{204}4^n$.]

2. Naj bo $f : A \to B$ surjektivna funkcija. Na A definiramo relacijo $\sim$ s predpisom $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Pokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in opiši ekvivalenčne razrede.

   [Rešitev: $\sim$ je ekvivalenčna, ekvivalenčni razredi so praslike, torej $[a] = f^{-1}(a)$ (kot praslika, ne kot inverz).]

3. Na množici $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ je definirana relacija $*$ s predpisom

   $$(n, e) * (m, f) = (n + m, 2^m e + f).$$

   Kaj predstavlja $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, *)$ kot algebrska struktura?

   [Rešitev: $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, *)$ je grupa; enota: $(0, 0)$; $(e, f)^{-1} = (-e, -2^{-e}f)$.]

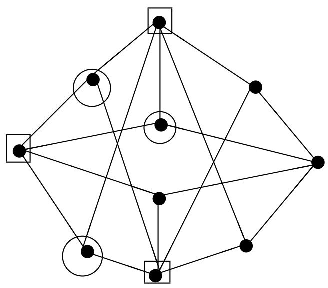
4. Za graf na sliki določi

   (a) ali je ravninski;

   (b) ali je Eulerjev;

   (c) $\chi(G)$.

   [Rešitev: ni ravninski (subdivizija $K_{3,3}$ je označena na sliki); ni Eulerjev—ima točko lihe stopnje; $\chi(G) = 2$ (dvodelni graf).]



1. izpit 2004/05

1. Štirje dečki in osem deklic se posede v krog in igra gnilo jajce. Na koliko različnih načinov se lahko posedejo, če jih razlikujemo le po spolu?

   [Rešitev: $\# = \frac{(12-1)!}{(4-1)!8!} + \frac{(12-1)!}{4!(8-1)!} = 495$.]

2. Za točki (x, y) in (a, b) ravnine definiramo relaciji

$$(x, y) \prec (a, b) \Leftrightarrow x < a \wedge y \leq b,$$

$$(x, y) \preceq (a, b) \Leftrightarrow x \leq a \wedge y \leq b.$$

   Pokaži, da relacija $\prec$ strogo delno in relacija $\preceq$ delno ureja ravnino $\mathbb{R}^2$.

   [Rešitev: asimetričnost $\prec$ se najlažje pokaže s protislovjem (redukcijo na absurd), ostale lastnosti pa zahtevajo rutinsko delo.]

3. Zapiši algoritem, ki število $n = (n_k n_{k-1} \ldots n_1 n_0)_{10}$ zapiše v dvojiški obliki $n = (n_\ell n_{\ell-1} \ldots n_1 n_0)_2$ in oceni njegovo časovno odvisnost.

   [Rešitev: $f(r) = \frac{6}{\log_{10} 2} r + 2 = O(r)$, kjer je $r = \log_{10} n$ za algoritem

   $z = 0$,

   $i = 0$

   while $z > 0$

   $x_i = z (\bmod 2)$;

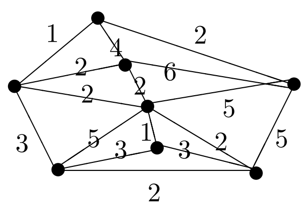
   $z = z (\operatorname{div} 2)$;

   $i = i + 1$;

   end.]

4. Reši Kitajski problem poštarja na grafu na sliki, če začneš v točki p.

[Rešitev: 52]



2. izpit 2004/05

1. Poišči vse celoštevilske rešitve sistema kongruenc

$$\begin{aligned} 11x &\equiv 3 \pmod{26} \\ 13x &\equiv 4 \pmod{33} \\ 17x &\equiv 5 \pmod{35}. \end{aligned}$$

   [Rešitev: $x \equiv 25225 \pmod{30030}$.]

2. Naj bosta $(G, *)$ in $(G', \circ)$ grupi. Pokaži, da je njun produkt $(G \times G', \cdot)$ grupa, če je

$$(a, b) \cdot (x, y) = (a * x, b \circ y).$$

   Kdaj je ta grupa Abelova?

   [Rešitev: $(G \times G', \cdot)$ je grupa in je Abelova natanko takrat, ko sta obe $(G, *)$ in $(G', \circ)$ Abelovi grupi.]

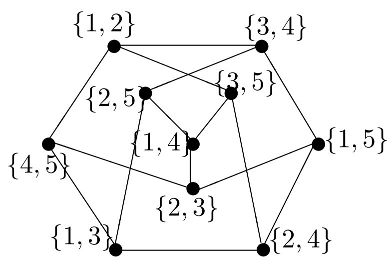
3. Poišči splošno rešitev diferenčne enačbe

$$2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = \sin\frac{\pi n}{2} + 3n\cos\frac{\pi n}{2}.$$

   [Rešitev: $a_n = C_1 + C_2(-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{10}\left((-3n - 333)\sin\frac{\pi n}{2} + (-9n + 124)\cos\frac{\pi n}{2}\right)$.]

4. Naj bo $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ in naj bo V množica vseh podmnožic z dvema elementoma množice X. Dva elementa iz V sta sosedi, če je njun presek prazen. Nariši tako opisan graf! Ali je izomorfen grafu na sliki?

   [Rešitev: sta izomorfna, označitev točk je na sliki.]



3. izpit 2004/05

1. Na množici $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ imamo definirano relacijo $\sim$ s predpisom $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$. Ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija? Če je, poišči ekvivalenčne razrede. Preveri še ali je $\sim$ sovisna.

   [Rešitev: $\sim$ ni tranzitivna(poglej elemenet $(0, 0)$) in torej tudi ni ekvivalenčna; ni sovisna.]

2. Podani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = (1, 2, 7)(4, 3, 6).$$

   Poišči podgrupo grupe S_7, ki je generirana α. Ali je ta (pod)grupa izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$? Reši še enačbo $\alpha\pi\beta = \beta\alpha$.

   [Rešitev: $\langle\alpha\rangle = \{id, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$; nista izomorfni, saj imata različno število elementov; $\pi = (1, 3, 5, 6)(2, 7)$.]

3. Zakodiraj besedo KOMAR z modulom $Q = 31$ in kodirnim številom $s = 7$, če imajo črke naše abecede vrednosti od 1 do 25, ostala mesta pa so $x = 26$, $y = 27$, $w = 28$, $q = 29$, $! = 30$ in presledek je 0. Določi še dekodirno število t ($ts \equiv 1 (\bmod \varphi(Q))$) in dekodiraj besedo AHDTR.

   [Rešitev: KOMAR→ZGSAH, $t = 13$, AHDTR→ARDUŠ.]

4. Za graf G je $\alpha(G)$ velikost največje množice $S \subseteq V(G)$, za katero poljubni točki iz S nista sosedi v grafu G. Določi $\alpha(K_n)$, $\alpha(K_{m,n})$, $\alpha(P_n)$, $\alpha(C_n)$ in $\alpha(G)$, če je G podan z

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$$
$$E(G) = \{ab, bc, cd, ae, bf, cg, dh, ef, fg, gh, ei, fj, gk, hl, ij, jk, kl\}.$$

   [Rešitev: $\alpha(K_n) = 1$, $\alpha(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$, $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ in $\alpha(G) = 6$.]

4. izpit 2004/05

1. Reši linearno kongruenco $4x \equiv 11 \pmod{315}$ na dva načina

   (a) direktno;

   (b) s pomočjo Kitajskega izreka o ostankih.

   [Rešitev: $x \equiv 239 \pmod{315}$.]

2. Poišči rešitev diferenčne enačbe

$$a_n + a_{n-1} + 6a_{n-2} = 5n(-1)^n + 2^n$$

   [Rešitev: $a_n = (\sqrt{6})^n(C_1 \sin\varphi n + C_2 \cos\varphi n) + \frac{1}{3}2^n + (\frac{5}{6}n + \frac{55}{36})(-1)^n$; kjer je $\varphi = \arctan\sqrt{23}$.]

3. Na množici M vseh realnih zvezni funkcij je definirana relacija $\leq$ s predpisom $f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ali relacija $\leq$ delno ureja množico M? Ali je $(M, \leq)$ mreža? Kaj sta $\inf\{f, g\}$ in $\sup\{f, g\}$?

   [Rešitev: relacija $\leq$ ureja delno množico M, hkrati je $(M \leq)$ tudi mreža, kjer sta $\inf\{f, g\} = h(x) = \min_{x\in\mathbb{R}}\{f(x), g(x)\}$ in $\sup\{f, g\} = k(x) = \max_{x\in\mathbb{R}}\{f(x), g(x)\}$.]

4. Graf G je podan z

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$
$$E(G) = \{ab, ae, ad, ah, bc, be, bf, cd, cf, cg, dg, dh, ef, eh, fg, gh\}.$$

   Preveri ali je G ravninski, Hamiltonov ali Eulerjev in določi $\chi(G)$.

   [Rešitev: G je na spodnji sliki, je ravninski (kot se vidi s slike), je Haminltonov ($abcdgfeha$), je tudi Eulerjev (vse točke imajo stopnjo 4) in je $\chi(G) = 4$.]