MNOŽICE:

Kaj je komplement množice?

- Komplement množice A definiramo kot S\A, kjer je S univerzalna množica.
- Zapišemo kot: $A^C = \{x \in S; x \notin A\}$

2. **Kako rešujemo sisteme enačb z množicami?**
   - Sistemi enačb z množicami:
     - obe enačbi v sistemu zapišeš kot L + D = 0, kjer je L levi del, D desni del, 0 prazna množica in + znak za simetrično razliko
     - obe enačbi združiš z unijo: (L1+D1) ∪ (L2+D2)=0
     - zadeve poračunaš, da dobiš samo unije osnovnih presekov (kakor nekakšna disjunktivna normalna oblika pri izjavnem računu)
     - če kakšen člen, recimo mu (A ∩ B) v uniji ne vsebuje X-a (neznane množice), člen zapišeš kot dva člena: (A ∩ B ∩ X) ∪ (A ∩ B ∩ X^C), kjer je X^C komplement x-a
     - izpostaviš X in X^c, dobiš recimo (P ∩ X) ∪ (Q ∩ X^C)
     - rešitev je Q podmnožica X podmnožica P^C
   - Kar pomeni, da je enačba rešljiva, ko je Q podmnožica P^C, rešitev pa je vsak X, ki ustreza tej enačbi.
   - V parametrični obliki: X=QU(T∩P^c), kjer je T poljubna množica.
   - (V praksi vmes še nekajkrat preveriš, če se kakšni členi pokrajšajo ali absorbirajo.)
3. **Kaj je unija, presek, družine množic?**
   - $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$ [unija]
   - $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$ [presek]
4. **Kaj je razbitje, pokritje množice A?**

- Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in \mathcal{I}\}$ je pokritje množice B, če je $B = \biguplus_{i \in I} A_i$.

- Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in \mathcal{I}\}$ je razbitje množice B, če je
  - $\mathcal{A}$ pokritje množice B
  - elementi $\mathcal{A}$ so neprazni in
  - elementi $\mathcal{A}$ so paroma disjunktni

5. **Kaj je moč končne množice? Napiši primer neskončne množice.**
6. **Določi moč naslednjih množic:** ∅, {∅}, {∅,{∅}}, {{∅,{∅}}}
7. **Dokaži (opisno) formulo za moč nekaj končnih množic.**
8. **Naj bosta A in B končni množici in f: A → B. Primerjaj moč množice A in njene slike f(A). Kakšna je povezava med močjo f(A) in lastnostmi preslikave f?**
9. **Kaj je potenčna množica (PA) množice A? Kaj veš o moči potenčne množice?**

- Potenčna množica množice A je množica vseh podmnožic množice A
- $PA = \{x, x \subseteq A\}$; 2^n elementov

10. **V katerem primeru če sploh, je moč množice A × A večja kot moč množice PA. Svojo trditev utemelji.**

- $|A \times A| = |A|^2$, $|PA| = 2^{|A|}$; $n^2 > 2^n$ → samo ko ima množica 3 el.

11. **Ali velja naslednja trditev: A ∩ B = ∅ ⇒ P(A ∪ B) = PA ∪ PB. Utemelji?**

- NE velja

  npr.: A={1} B={2}
  PA={{},{1}} PB={{},{2}}
  PA U PB = {{},{1},{2}} ... moč 3
  A U B = {1,2}
  P(A U B) = **{{},{1},{2},{1,2}}** ... moč 4
  P(A U B) vsebuje množice, ki vsebujejo elemente Bja in Aja,
  PA U PB pa ne.

12. **Poišči množici A in B, za kateri velja A ⊆ B in PB ⊆ PPA**
13. **Ali iz A ⊆ B sledi P(A) ⊆ P(B)** ? **Utemelji.**
14. **Kaj pravi načelo vključitve in izključitve?**

- Če je $A = A_1 \cup A_2 \cup ..... A_n$, potem je moč množice A (|A|):
  $|A| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - ... - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + ----+(-1)^* |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$
- še en primer: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

- pa še en primer: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

15. Kaj je kartezični produkt množic A in B?

- Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov $A \times B = \{(a, b);\ a \in A \wedge b \in B\}$

16. **Ali iz $A \times B \subseteq C \times D$ sledi $A \subseteq C$? Utemelji.**

RELACIJE

17. Kaj je relacija R v množici A?

- Množica R je (dvomestna) relacija v množici A, če je $R \subseteq A \times A$
- Množica R je (dvomestna) relacija, če je vsak njen element urejen par: R je relacija $\Leftrightarrow\ \forall x \in R \exists u, v : x = (u,v)$

18. Naštej lastnosti relacij!

- *Refleksivna : $\forall x \in A: xRx\ (id_A \subseteq R)$*
- *Irefleksivna : $\forall x \in A: \neg xRx\ (id_A \subseteq R^C \Leftrightarrow id_A \cap R = \emptyset)$*
- *Simetrična : $\forall x,y \in A: xRy \Rightarrow yRx\ (R = R^{-1})$*
- *Asimetrična : $\forall x,y \in A: xRy \Rightarrow \neg yRx\ (R \cap R^{-1} = \emptyset)$*
- *Antisimetrična : $\forall x,y \in A: xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y\ (R \cap R^{-1} \subseteq \emptyset)$*
- *Tranzitivna : $\forall x,y,z \in A: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz\ (R*R \subseteq R)$*
- *Intranzitivna : $\forall x,y,z \in A: xRy \wedge yRz \Rightarrow \neg xRz\ (R*R \subseteq R^C \Leftrightarrow R*R \cap R^C = \emptyset)$*
- *Sovisna : $\forall x,y \in A: x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx\ (R \cup R^{-1} \cup id_A = U_A = AxA)$*
- *Strogo sovisna : $\forall x,y \in A: xRy \vee yRx\ (R \cup R^{-1} = U_A = AxA)$*
- *Enolična : $\forall x,y,z \in A: xRy \wedge xRz \Rightarrow y=z\ (R^{-1} * R \subseteq id_A)$*

19. Lastnosti relacij v grafičnem smislu:

- Refleksivna: v vsaki točki je zanka (kaže sama nase)
- Irefleksivna: v nobeni točki ni zanke
- Simetrična: kadar so povezave obojestranske
- Asimetrična: brez zank in vse puščice so enosmerne
- Antisimetrična: nobena povezava ni obojestranska
- Tranzitivna: kadar iz ene točke v drugo pridemo v dveh korakih, lahko tudi v enem
- Intranzitivna: če lahko iz ene točke v drugo pridemo v dveh korakih, v enem samem ne moremo
- Sovisna: vsak par različnih točk grafa R je povezan s povezavo vsaj v eno smer
- Strogo sovisna: med vsakima dvema točkama je puščica, imamo tudi vse zanke
- Enolična: iz vsake točke gre ven kvečjemu ena puščica (ena ali nobena)

20. Naštej lastnosti operacij z relacijami!

- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- $R*id_A = id_A*R = R$
- $(R*S)*T = R*(S*T)$
- $(R*S)^{-1} = S^{-1}*R^{-1}$
- $R*(S \cup T) = R*S \cup R*T$
- $R \subseteq S \Rightarrow R*T \subseteq S*T$

21. Kaj je ekvivalenčna relacija?

- R je ekvivalenčna relacija, če je: *refleksivna, simetrična, tranzitivna*
- *Refleksivna : $\forall x \in A : xRx\ (id_A \subseteq R)$*
- *Simetrična : $\forall x,y \in A : xRy \Rightarrow yRx\ \ (R = R^{-1})$*
- *Tranzitivna : $\forall x,y,z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz\ \ (R*R \subseteq R)$*

22. Kakšna je zveza med ekvivalenčno relacijo v A in razbitjem množice A?

- Če je R ekvivalenčna relacija na A, potem je A/R razbitje množice A.

23. Kdaj pravimo da je relacija simetrična?

- *$\forall x,y \in A: xRy \Rightarrow yRx\ (R = R^{-1})$*

24. Naj bo R simetrična relacija v A. Ali velja zveza $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$. Utemelji.

25. Kaj je inverzna relacija R^{-1}?

- $R^{-1} := \{(y,x);\ (x,y) \in R\}$ oz $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$

26. Kaj je graf relacije? Kako izgleda graf simetrične relacije?

- Elementi množice A so predstavljeni kot točke v ravnini, relacije med njimi pa so usmerjene puščice med točkami.
- Graf simetrične funkcije – povezave so obojestranske

CELOŠTEVILSKA ARITMETIKA:

27. Kaj pravi izrek o deljenju?

- Za $m,n \in Z, m>0$ obstajata enolično določena $k,r \in Z$, da velja $m=kn+r$, pri čemer velja $0 \le r < m$ (k-kvocient, r-ostanek)
- Pravilo, da n deli m oz n|m, če obstaja $k \in Z$, da velja $m=kn$

28. Kako je definiran gcd in lcm?

- $\gcd(a,b)=\max\{d \in N;\ d|a \wedge d|b\}$ - največji skupni delitelj
  Gcd dobimo kot zadnji neničelni ostanek v REA. Obenem gcd (m,n) zapišemo kot celoštevilsko linearno kombinacijo števil m in n.
- $\text{lcm}(a,b)=\min\{v \in N;\ a|v \wedge b|v\}$ - najmanjši skupni večkratnik

29. Kako največji skupni delitelj naravnih št m in n izračunamo v praksi?

- gcd(m,n) dobimo kot zadnji neničelni ostanek v REA

30. Razloži Evklidov algoritem in razširjeni Evklidov algoritem! Kaj vse izračunamo z njim?

31. Kdaj je enačba ax+by=c z neznankama x in y diofantska?

- Enačba je diofantska, če ima celoštevilska podatke in iščemo celoštevilske rešitve. Znanani so a, b, c iščemo pa celoštevilska x in y

32. Za katere p (cela št) je rešljiva enačba 2x+2py=p?

- gcd(a,b)|c –> gcd(2,2p)|p -> enačba je rešljiva če je p deljiv z 2

33. Kdaj je diofantska enačba rešljiva?

- Če je d.e. podana kot $a_1x+a_2y+a_3z+...=c$ potem je rešljiva ntk $\gcd(a_1, a_2, a_3,...)|c$

34. Kako poiščemo vse rešitve diofantske enačbe. Kakšno vlogo ima pri tem lcm?

35. Koliko rešitev ima lahko linearna diofantska enačba z dvema neznakama v naravnih št.?

36. Denimo, da sta para (2,17) in (4,22) dve rešitvi linearne diofantske enačbe z dvema neznankama. Kaj znaš povedati o številu rešitev te iste enačbe v množici naravnih števil?

37. Kdaj sta števili tuji?

- a in b sta ti tuji, ko velja gcd(a,b) = 1

38. Kaj sta praštevilska dvojčka?

- Če je p neko praštevilo, je praštevilski dvojček oblike {p,p+2}

39. Kaj je Eulerjeva funkcija?

- Če imamo φ(n) je, Eulerjeva funkcija moč množice vseh števil med 1 in n, ki jo tuja n

40. Kaj lahko poveš za Eulerjevo funkcijo praštevila?

- Vrednost funkcije je p-1, če je p praštevilo, saj so ji tuja vsa števila od 1 do p-1, sam sebi ni tuj.

41. Kako izračunamo Eulerjevo funkcijo?

- N razstavimo na prafaktorje ($45 = 5*3^2$)
- Upoštevamo pravilo $\varphi(a*b)=\varphi(a)*\varphi(b)$
- Npr, da je $c = ab^2$, pri čemer sta a in b praštevili
- $\varphi(c)=\varphi(a)*\ \varphi(b^2)=c*(1-1/a)(1-1/b)$
- v spošnem $k= p_1^{k_1}+ p_2^{k_2}+...+p_m^{k_m}$
- $\varphi(n)=n*(1-1/p_1)(1-1/p_2)$

42. **Izračunaj** φ(7000)

43. Določi število števil med 1 in 3602(vključno), ki so tuja št 360.

44. Določi vsaj šest obrnljivih el kolobarja Z_{30}.

45. Ali obstaja kolobar ostankov Z_m, ki vsebuje natančno 15 obrnljivih elementov?

46. Kaj so delitelji niča v kolobarju ostankov?

- Elementoma a,b je element A \ {0}, za katere velja a • b = 0, pravimo pravi delitelji niča.
- *Element a je v Z_m delitelj niča, ko zadošča enačbi $a*mb=0$ $(a,b \in Z)$*

47. Kdaj je element obrnljiv?

- Element a je v Z_m obrnljiv, ko zadošča enačbi $a*mb=1$ $(a,b \in Z)$

PERMUTACIJE

48. Kdaj pravimo, da permutacija π pripada S_n?

49. Na katere načine lahko predstavimo permutacijo? Napiši zgled.

- S tabelicami ali disjunktnimi cikli

50. Kdaj pravimo da je permutacija π ciklična (ali cikel)?

- Ko je sestavljena iz enega samega cikla dolžine n

51. Kakšna je parnost ciklične permutacije (cikla)?

52. Kdaj pravimo da je permutacija liha, soda?

- Soda: če jo lahko zapišemo kot produkt sodo mnogo transpozicij, in liha če jo lahko zapišemo kot produkt liho mnogo transpozicij.

53. Poišči permutacijo, ki ima natančno eno inverzijo.

54. Kaj je inverzija v permutaciji? Poišči tri permutacije iz S_5, ki imajo natančno eno, dve oz tri inverzije.

- Števili sta v inverziji, če sta v spodnji vrstici tabelice v napačnem vrstnem redu.

55. V kakšni zvezi je parnost permutacije z inverzijami v permutaciji?

56. Kaj je parnost permutacije?

57. Permutacija iz S_{30} je opisana s tabelico. Kako bi določili njeno parnost? Opiši učinkovit postopek.

58. Permutacija je zapisana ko produkt 4-ciklov (4 3 2 5)*(1 6 3 2)*(7 3 4 6). Določi njeno parnost.

59. Permutacija π naj bo liha, permutacija ψ pa soda. Določi parnost permutacij π^2, π^3, π^4, ψ^2, ψ^3, ψ^4

60. Pokaži, da lahko simetrični grupi S_n določimo naravno št N>1 z lastnostjo, da je π^N = id za vsako permutacijo $\pi \in S_n$

GRAFI:

61. Kaj je V(G) in kaj E(G)?

- V je množica vozlišč, E – množica povezav

62. Kaj je komponenta grafa?

63. Kdaj je zaporedje grafično? Kaj je grafično zaporedje?

- Končno zaporedje naravnih števil $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$ je grafično,
  - če obstaja graf G z n vozlišči, ki imajo stopnje enake $d_1, d_2, \ldots, d_n$.
  - oz. ntk je tudi ko je tudi zaporedje $d_2\text{-}1, d_3\text{-}1, \ldots. d_n$ grafično - to je ntk požrešna metoda uspe

64. Ali je zaporedje 3,3,3.. (10x3) grafično? Utemelji?

65. Ali je zaporedje 7 7 5 5 5 3 3 3 3 grafično. Utemelji.

66. Kakšna zveza velja med št vozlišč (točkami) in povezavami v d-regularnem grafu?

- vozlišča • d = 2 • povezava

67. Kdaj je graf regularen?

68. Kaj je vpet podgraf?

- Podgraf H grafa G je vpet podgraf, če je V(H) = V(G).

69. **Kaj je induciran podgraf?**

- Podgraf H grafa G je induciran podgraf, če za vsako povezavo e = uv ∈ E(G) velja:
  - če sta u in v vozlišči grafa H, potem je tudi e povezava v grafu H.

70. Kdaj je graf G= (V,E) povezan?

- Graf G je povezana, če za vsaki dve različni vozlišči u, v ∈ V(G) v grafu G obstaja u-v sprehod.

71. Kakšen je enostaven sprehod?

- Sprehod v grafu G je enostaven, če vsako povezavo uporabi največ enkrat.

72. Kaj je Eulerjev obhod?

- Je enostaven obhod v grafu G, ki vsebuje vse povezave in vsa vozlišča.

73. Kdaj graf G=(V,E) vsebuje Eulerjev obhod?

74. Nariši primer povezanega grafa k ne vsebuje Eulerjevega obhoda.

75. Kaj je Eulerjev graf?

- Je graf G ki ima kak Eulerjev obhod. Graf G je Eulerjev natanko tedaj, ko je G povezan in so vsa njegova vozlišča sodih stopenj. - narišemo ga z eno samo potezo, ki je povrh vsega še sklenjen