UNIVERZA V LJUBLJANI

FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Vprašanja za ustni izpit

(Diskretne strukture)

Avtor: Tadej Golobič

Mentor: izr. Prof. dr. Gašper Fijavž

Kraj in datum: Semič, januar 2012

Kazalo vsebine

Izjavni račun

1. **Kaj je izjava?**
   Izjava je vsak stavek, ki je bodisi resničen, bodisi neresničen

2. **Kako delimo izjave?**
   a. Po vsebini na: resnične (1), neresnične/lažne (0)
   b. Po obliki na: osnovne/enostavne, sestavljene
3. **Naštej nekaj izjavnih veznikov!**
   a. Enomestni: negacija
   b. Dvomestni: konjunkcija, disjunkcija, implikacija, ekvivalenca
4. **Napiši pravilnostno tabelo za osnovne veznike**

negacija

p	$\neg p$
0	1
1	0

konjunkcija

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

disjunkcija

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

implikacija

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ekvivalenca

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5. **Kako je definirana ekskluzivna disjunkcija?**
   Ekskluzivna disjunkcija ($A \veebar B$ – beremo: A ekskluzivni ali B) je resnična natanko tedaj, ko je natanko eden od izjavnih izrazov A in B resničen.

6. **Kako je definiran Shefferjev veznik?**
   Shefferjev veznik (NAND – $A \uparrow B$) je neresničen natanko tedaj, ko sta oba izjavna izraza A in B resnična. Definicija $A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$

7. **Kako je definiran Pierce-Lukasiewiczev veznik?**
   Pierce-Lukasiewiczev veznik (NOR – $A \downarrow B$) je resničen natanko tedaj, ko sta oba izjavna izraza A in B resnična. Definicija: $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$

8. **Kakšno prioriteto imajo posamezni vezniki?**
   Negacija – konjunkcija – (ekskluzivna) disjunkcija – implikacija – ekvivalenca

9. **Kaj je konstrukcijsko drevo izjavnega izraza?**
   Konstrukcijsko drevo opiše, kako izjavni izraz zgradimo iz bolj enostavnih izjavnih izrazov.

10. **Kaj je resničnostna tabela izjavnega izraza?**
    Resničnostna tabela izjavnega izraza za vsak nabor logičnih vrednosti izjavnih spremenljivk pove logično vrednost izjavnega izraza.

11. **Kaj je tavtologija?**
    Tavtologija je izjava, ki je »vedno« resnična.

12. Kaj je protislovje?

Protislovje je izjava, ki je »vedno« neresnična.

13. Kdaj je izjavni izraz nevtralen?

Izjavni izraz je nevtralen, če ni ne tavtologija, ne protislovje

14. Napiši nekaj primerov tavtologije!

Tipične tavtologije so: $p \vee \neg p$ $\quad p \Rightarrow p$ $\quad p \Leftrightarrow p$

15. Napiši nekaj primerov protislovja!

Tipična protislovja so: $p \wedge \neg p$ $\quad \neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ $\quad p \Leftrightarrow \neg p$

16. Kdaj sta izjavna izraza A in B enakovredna?

Izjavna izraza A in B sta enakovredna, če imata pri veh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk enako vrednost. V tem primeru pišemo $A \sim B$

17. Kaj pravi izrek o enakovrednih izjavnih izrazih?

Izjavna izraza A in B sta enakovredna natanko tedaj, ko je izraz $A \Leftrightarrow B$ tavtologija. Za enakovrednost izjavnih izrazov veljajo naslednje zveze:

a. $A \sim A$
b. Če $A \sim B$, potem $B \sim A$
c. Če $A \sim B$ in $B \sim C$ potem $A \sim C$

18. Kaj so zakoni izjavnega računa?

Nekateri pari enakovrednih izjavnih izrazov imajo posebna imena. Takim izjavnim izrazom pravimo zakoni izjavnega računa.

19. Kako pokažemo, da sta izjavna izraza enakovredna?

Dovolj je da pokažemo da imata izraza pri vsakem logičnem naboru vrednosti spremenljivk isto logično vrednost. Sestavimo resničnostno tabelo in pogledamo, če je v vseh vrsticah ista logična vrednost.

20. Kako pokažemo, da sta izjavna izraza neenakovredna?

Dovolj je da pokažemo, da imata izraza pri vsaj enem (lahko tudi pri večih) logičnem naboru vrednosti spremenljivk različno logično vrednost. Sestavimo resničnostno tabelo in pogledamo, če se v kateri vrstici logični vrednosti razlikujeta

21. Kaj je disjunktivna normalna oblika?

DNO izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO}, za katerega velja:

a. $A \sim A_{DNO}$
b. A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

22. Kako izjavnemu izrazu A določimo izjavni izraz A_{DNO}?

A_{DNO} lahko zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A resničen, pripravimo eno osnovno konjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru resnične spremenljivke in negacije v tem naboru lažnih spremenljivk.

23. Kaj je konjuktivna normalna oblika?

A_{KNO} izjavnega izraza A je izraz A_{KNO}, za katerega velja:

a. A ~ A_{KNO}
b. A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

24. Kako izjavnemu izrazu A določimo izjavni izraz A_{KNO}?

A_{KNO} lahko zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A neresničen, pripravimo eno osnovno disjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru lažne spremenljivke in negacije v tem naboru resničnih spremenljivk.

25. Kateri izjavni izrazi imajo DNO?

Vsak izjavni izraz, ki ni protislovje ima DNO.

26. Kateri izjavni izrazi imajo KNO?

Vsak izjavni izraz, ki ni tavtologija, ima KNO.

27. Kaj je posledica izjavnih izrazov DNO in KNO?

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike: negacija, konjunkcija, disjunkcija (polni nabori)

28. Ali je DNO enolično določena?

Ne. DNO dobimo na osnovi vrstic, kjer je A resničen. Pri tem pa ni nujno da vrstice izpisujemo po vrsti (na primer: od zgoraj navzdol). Vrstice (ki v DNO nastopajo kot osnovne konjunkcije) pa lahko med seboj tudi pomešamo – pri tem se vrednost izraza ne spremeni. Zaradi tega ne moremo trditi da je DNO enolično določena.

29. Kdaj pravimo, da je družina izjavnih veznikov N poln nabor?

Družina izjavnih veznikov N je poln nabor, če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike iz N.

30. Naštej nekaj polnih naborov!

Polni nabori so: {¬, Λ, V} {¬, Λ} {¬, V} {¬, =>} {0, =>}

31. Kako v praksi pokažemo, da je nabor izjavnih veznikov N poln?

To pokažemo tako, da naredimo naslednje:

a. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov Z
b. Vsak veznik iz znanega nabora Z izrazimo samo z uporabno veznikov iz N

Sklepanje

32. Kaj je pravilen sklep?

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \dots A_n$, B je pravilen sklep s predpostavkami $A_1, A_2, \dots A_n$ in zaključkom B, če je zaključek B resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke.

Pišemo: $A_1, A_2, \dots A_n \models B$

In beremo: Iz predpostavk $A_1, A_2, \dots A_n$ logično sledi zaključek B

33. Kaj pravi izrek o pravilnem sklepu?

$A_1, A_2, \dots A_n \models B$ natanko tedaj, ko $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \dots A_n) \Rightarrow B$

34. Kako sklepamo v izjavnem računu?

Sklepamo s pomočjo pravil sklepanja. Uporabimo eno od naslednjih:

a. Modus ponens (MP) $A, A \Rightarrow B \models B$
b. Modus tollens (MT) $A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$
c. Disjunktivni silogizem (DS) $A \vee B, \neg B \models A$
d. Hipotetični silogizem (HS) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$
e. Združitev (Zd) $A, B \models A \wedge B$
f. Poenostavitev (Po) $A \wedge B \models A$
g. Pridružitev (Pr) $A \models A \vee B$

35. Kako pokažemo, da je sklep pravilen?

Pravilnost sklepa $A_1, A_2, \dots A_n \models B$ pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov C_1, $C_2 \dots C_m$, kjer je $C_m = B$ in za $i = 1, 2 \dots m$ velja:

a. C_i je ena od predpostavk
b. C_i je tavtologija
c. C_i je enakovreden enemu od predhodnih izrazov v zaporedju
d. C_i logično sledi iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov

36. Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Poiskati je treba proti primer, tj. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

37. Kdaj uporabimo pogojni sklep?

Pogojni sklep (PS) uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Izrek: $A_1, A_2, \dots A_n \models B \Rightarrow C$ natanko tedaj ko: $A_1, A_2, \dots A_n, B \models C$

38. Kdaj uporabljamo sklep s protislovjem?

Sklep s protislovjem (RA) lahko uporabljamo kadarkoli.

Izrek: $A_1, A_2, \dots A_n \models B$ natanko tedaj, ko: $A_1, A_2, \dots A_n, \neg B \models 0$

39. Kdaj uporabljamo analizo primerov?
Analizo primerov (AP) lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Izrek: A_1, A_2, … A_n B_1 V B_2|= C   natanko tedaj ko:
A_1, A_2, … A_n, B1|= C   in A_1, A_2, … A_n, B_2|= C

40. Kako lahko pojem veljavnega sklepa povežemo s pojmom tavtologije?
Tavtologija je izjavni izraz, ki je resničen pri vseh naborih izjavnih spremenljivk. Veljaven sklep pa je resničen tudi, ko so resnične vse predpostavke. Iz tega sledi, da je na nek način tavtologija.

Predikatni račun

41. Kaj je področje pogovora?
Področje pogovora (PP) je neprazna množica z elementi. Elementi te množice, so na primer: ljudje, številke, živali …

42. Kaj so predikati?
Predikati so logične funkcije, ki za svoje argumente lahko dobijo elemente področja pogovora. Če v predikate vstavljamo elemente področja pogovora dobimo izjave.

43. Kako ločimo predikate?
Predikate ločimo po mestnosti. Enomestni predikati so lastnosti elementov v področju pogovora. Dvomestni predikati pa so relacije (ali tudi zveze) med elementi področja pogovora.

44. Katera kvantifikatorja poznaš?
Univerzalni kvantifikator: ∀ (beremo: za vsak),
Eksistenčni kvantifikator: ∃ (beremo: obstaja)

45. Kakšen je pomen univerzalnega kvantifikatorja?
$\forall x P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko imajo vsi elementi področja pogovora lastnost P. Sicer je neresnična. (Velja samo za izbrano interpretacijo)

46. Kakšen je pomen eksistenčnega kvantifikatorja?
$\exists x P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko obstaja (vsaj en) element področja pogovora, ki ima lastnost P. Sicer je neresnična. (Velja samo za izbrano interpretacijo)

47. Kaj so termi in kaj atomi?
Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi termi.
Atomi predikatnega računa pa so na primer: P(x), P(a), P(x, y), Q(a, x) …
Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate. Torej so to izjavne formule

48. Kaj je doseg kvantifikatorja?

Doseg kvantifikatorja je najmanjši možen: najmanjša izjavna formula, ki jo preberemo desno od kvantifikatorja (skupaj z njegovo spremenljivko).
Kvantifikator veže svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.

49. Katere spremenljivke so vezane in katere proste?

Vstop spremenljivke x je vezan, če se ta x nahaja v območju delovanja/dosega kvantifikatorja $\forall x$ ali $\exists x$. Vstop spremenljivke, ki ni vezan, je prost.

50. Kaj je interpretacija izjavne formule?

Interpretacija I izjavne formule W je sestavljena iz neprazne množice D, ki ji pravimo področje pogovora interpretacije. Poleg tega:

a. Vsakemu predikatu ustreza 0/1 logična funkcija v D
b. Vsaki konstanti določimo vrednost v D (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante)
c. Vsaki prosti spremenljivki v W določimo vrednost v D, pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo isto vrednost iz D

51. Če formula ni zaprta, kako jo dobimo?

Proste spremenljivke nadomestimo z elementi področja pogovora ali pa jih zapiramo z uporabo kvantifikatorjev. Na ta način dobimo zaprto formulo, ki je (ob izbranem PP in pomenu predikatov) izjava.

52. Kaj pravi izrek o vpeljavi kvantifikatorjev?

Naj bo W formula. Z W(x/a) označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli W vse proste vstope spremenljivke x nadomestimo z a.

Formula $\forall x W$ je resnična v interpretaciji I, če je za vsak element področja pogovora d ∈ D resnična formula W(x/d). Sicer je $\forall x W$ neresnična.
Formula $\exists x W$ je resnična v interpretaciji I, če v področju pogovora obstaja d ∈ D, za katerega je formula W(x/d) resnična. Sicer je $\exists x W$ neresnična.

53. Kaj lahko poveš o preimenovanju spremenljivk?

Želja: če je W formula, potem imen prostih spremenljivk ne smemo spreminjati, če želimo pridelati enakovredno formulo. Vezane spremenljivke lahko preimenujemo tako, da ista spremenljivka (tj. spremenljivka z istim imenom):

a) Ne nastopa pri več kvantifikatorjih
b) Ni hkrati vezana in prosta

54. Kdaj pravimo, da sta izjavni formuli enakovredni?

Izjavni formuli W in V sta enakovredni, če imata isto logično vrednost v vseh možnih interpretacijah. V tem primeru pišemo W ~ V

55. Kdaj je izjavna formula splošno veljavna?

Izjavna formula W je splošno veljavna, če je resnična v vsaki interpretaciji

56. Kdaj je izjavna formula neizpolnljiva?

Izjavna formula V je neizpolnljiva, če je neresnična v vsaki interpretaciji.

57. Kaj je prenexna normalna oblika izjavne formule?

Trditev: Vsako izjavno formulo lahko zapišemo tako, da se kvantifikatorji nahajajo na začetku.
Izjavno formulo moramo preoblikovati tako da:

a) Preimenujemo spremenljivke
b) Namesto => in <=> uporabljamo ⌐, Λ, V
c) Kvantifikatorje postavimo na začetek formule z uporabo zakonov izjavnega računa

Tako preoblikovani izjavni formuli pravimo prenexna normalna oblika izjavne formule.

58. Kako iz formule naredimo izjavo?

a) Namesto spremenljivke vstavimo konstante
b) Formulo zapremo s kvantifikatorji

59. Kaj lahko poveš o zamenjavi kvantifikatorjev?

Zamenjava raznovrstnih kvantifikatorjev (na primer: $\forall x \exists y$) v splošnem ni možna.
Zamenjujemo lahko le istovrstne kvantifikatorje (na primer: $\forall x \forall y <=> \ \forall y \forall x$

60. Kako sklepamo v predikatnem računu?

a) Izberemo interpretacijo (če slučajno ni določena)
b) Izjavne formule preoblikujemo tako, da kvantifikatorji nastopajo na začetku
c) Odpravimo kvantifikatorje
d) Sklepamo kot v izjavnem računu
e) Uvedemo kvantifikatorje nazaj
f) Upoštevamo izbrano interpretacijo (ali tisto, ki je določena)

61. Naštej razlike med predikatnim in izjavnim računom!

Predikat je logična funkcija, ki za svoje argumente dobi elemente iz področja pogovora (PP). Če v predikat vstavimo elemente iz PP dobimo izjave. P(x, y) predikat pove lastnosti svojih argumentov.
Izjavni račun je izjava, ki je lahko neresnična ali resnična.

Predikati nam ne povedo ničesar o (ne)resničnosti. Izjavni račun je sestavljen iz spremenljivk in izjavnih veznikov, predikat pa samo iz spremenljivk/elementov.

Množice

62. Kako lahko podajamo množice?

a) Z naštevanjem elementov (na primer: A = {0, 1, 2})
b) Z neko izjavno formulo (na primer: A = {x; φ(x) })
Velja naslednje: $x \in A <=> \varphi(x)$

63. Kdaj pravimo da sta množici enaki?

Množici sta enaki, kadar velja: $A = B <=> \forall x(x \in A <=> x \in B)$

64. Kdaj je množica A podmnožica množice B?

Množica A je podmnožica množice B, kadar velja: $A \subseteq B <=> \forall x(x \in A => x \in B)$

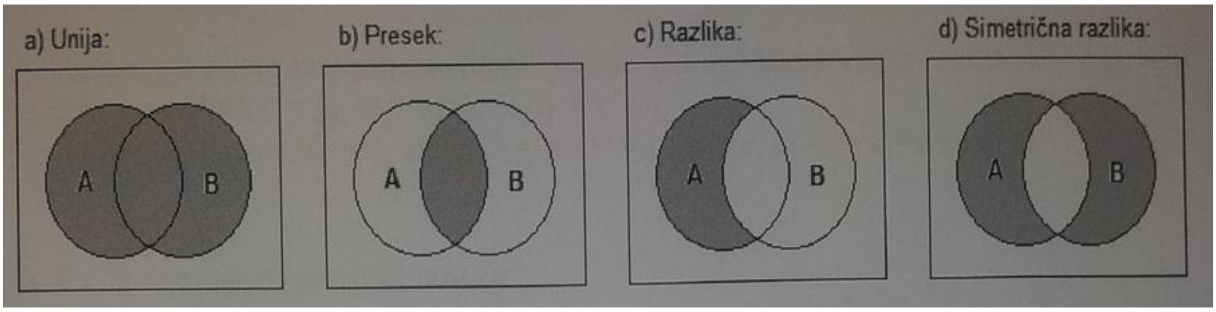
65. Kdaj je množica A prava podmnožica množice B?

Množica A je prava podmnožica množice B, kadar velja: $A \subset B <=> A \subseteq B \wedge A \neq B$
Temu predpisu pravimo tudi relacija stroge inkluzije.

66. Katere operacije z množicami poznaš?

a) Unija: $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$
b) Presek: $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$
c) Razlika: $A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$
d) Simetrična razlika: $A + B = \{x; x \in A \veebar x \in B\}$

67. Z Vennovi diagrami predstavi operacije!



68. Kdaj sta množici disjunktni?

Množici A in B sta disjunktni, če je A ∩ B = 0.

69. Katera množica je univerzalna množica?

Univerzalna množica (označimo jo s S – Svet) ustreza področju pogovora v predikatnem računu. Vse obravnavane množice so vsebovane v S.

70. Kaj je komplement množice?

Komplement množice A (označimo ga z A^C) definiramo kot: $A^C = S \setminus A$

71. Kaj je potenčna množica?
Potenčna množica PA množice A je množica vseh podmnožic A.
Definiramo jo kot: $PA = \{B; B \subseteq A\}$

72. Kakšna je povezava med množico in njeno potenčno množico (glede na elemente)?
Če množica A vsebuje natanko n elementov (in je n naravno število) potem PA vsebuje natanko 2^n elementov.
Trditev: Če je $A \subseteq B$, potem je tudi $PA \subseteq PB$

73. Kaj je pokritje množice?
Družina množic $A = \{Ai, i \in I\}$, je pokritje množice B, če je $B = U_{i \in I} A_i$

74. Kaj je razbitje množice?
Družina množic $A = \{Ai, i \in I\}$ je razbitje množice B, če je:

a) A pokritje množice B (velja: $B = U_{i \in I} A_i$
b) Elementi A so neprazni
c) Elementi A so paroma disjunktni

75. Kako je definiran urejeni par?
Urejeni par s prvo komponento (koordinato) a in drugo komponento b označimo z (a, b) in definiramo kot: (a, b) = {{a}, {a, b}}
Trditev: (Osnovna lastnost urejenih parov) (a, b) = (c, d) <=> a = c in b = d

76. Kaj je kartezični produkt množic?
Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov, ki je definirana tako:
$A \times B - \{ (a, b); a \in A \wedge b \in B \}$

77. Kaj lahko poveš o moči kartezičnega produkta?
Moč kartezičnega produkta je enaka produktu moči obeh faktorjev. Če je množica A končna z m elementi in B končna z n elementi, potem je A × B končna z m*n elementi.

78. Kdaj je element množice minimalen oz. maksimalen?
Naj bo A delno urejena z relacijo <=. Potem velja:
m je minimalen v A, če: $\forall x \in A: (x <= m => x = m)$
M je maksimalen v A, če:$\forall x \in A: (M <= x => x = M)$

79. Kdaj je element množice prvi oz. zadnji?
Naj bo a delno urejena z relacijo <=. Potem velja:
a je prvi v A, če: $\forall x \in A: (a <= x)$
a je zadnji v A, če: $\forall x \in A: (x <= z)$

80. Kaj je supremum?
Če v M obstaja prvi element, je to najmanjša zgornja meja (tudi natančna zgornja meja ali supremum) množice B v množici A. Oznaka sup B.

81. Kaj je infimum?

Če v m obstaja zadnji element, je to največja spodnja meja (tudi natančna spodnja meja ali infimum) množice B v množici A. Oznaka inf B.

82. Kaj je moč končne množice?

Naj bo A končna množica. Potem |A| označuje število elementov v množici ali tudi moč množice A.

83. Kdaj sta končni množici enako močni?

Naj bosta A in B končni množici. Pravimo da sta A in B enako močni, A ~ B, če je |A| = |B|.

84. Kdaj je množica končna?

Množica A je končna natanko tedaj, ko ne obstaja prava podmnožica $S \subset A$, ki ima enako moč kot A.

Izrek: Množica A je končna, če obstaja tako zaporedja a_1, a_2, a_3 … a_n (ki je lahko tudi prazno), da se vsak element a v zaporedju pojavi vsaj enkrat.

85. Kdaj je množica neskončna?

Množica A je neskončna, kadar je enako močna, kot katera izmed njenih pravih množic.

86. Kaj lahko poveš o moči kartezičnega produkta?

Moč kartezičnega produkta je enaka produktu moči obeh faktorjev. Če je množica A končna z m elementi in B končna z n elementi, potem je kartezični produkt množice A in B (A × B) končna množica z m*n elementi.

Relacije

87. Kaj je relacija?

Relacija je posebna vrsta množice.
Množica R je (dvomestna) relacija, če je vsak njen element urejen par.
R je relacija <=> $\forall x \in R\ \exists u, v : x = (u, v)$

Množica R je (dvomestna) relacija v množici A, če je $R \subseteq A \times A$.
Dogovor: namesto $(x, y) \in R$ pišemo xRy

88. Kako je definirano definicijsko območje?

Naj bo R relacija v A. Potem definicijsko območje Dr definiramo kot: $Dr = \{x;\ \exists y: xRy\}$

89. Kako je definirana zaloga vrednosti?

Naj bo R relacija v A. Potem zalogo vrednosti Zr definiramo kot: $Zr = \{y;\ \exists x : xRy\}$

90. Naštej lastnosti relacij!

Naj bo R relacija v A. Pravimo da je:

1) $R\ refleksivna \iff \forall x \in A: xRx$
2) $R\ irefleksivna \iff \forall x \in A: \neg xRx$
3) $R\ simetrična \iff \forall x, y \in A: xRy => yRx$
4) $R\ asimetrična \iff \forall x, y \in A: xRy => \neg yRx$
5) $R\ antisimetrična \iff \forall x, y \in A: xRy \land yRx => x = y$
6) $R\ tranzitivna \iff \forall x, y, z \in A: xRy \land yRz => xRz$r
7) $R\ itranzitivna \iff \forall x, y, z \in A: xRy \land yRz => \neg xRz$
8) $R\ sovisna \iff \forall x, y \in A: x \neq y => xRy \lor yRx$
9) $R\ strogo\ sovisna \iff \forall x, y \in A: xRy \lor yRx$
10) $R\ enolična \iff \forall x, y, z \in A: xRy \land xRz => y = z$

91. Kako v grafu preverjamo lastnosti relacij?

Refleksivna: v vsaki točki je zanka (kaže sama nase)
Irefleksivna: v nobeni točki ni zanke
Simetrična: povezave so obojestranske
Asimetrična: brez zank in vse puščice so enosmerne
Antisimetrična: nobena povezava ni obojestranska
Tranzitivna: če iz neke točke v drugo pridemo v dveh korakih, lahko tudi v enem samem
Itranzitivna: če iz neke točke v drugo pridemo v 2 korakih, v enem samem ne moremo
Sovisna: vsak par različnih točk grafa je povezan s povezavo vsaj v eno smer
Strogo sovisna: med vsakima dvema točkama je puščica, imamo tudi vse zanke
Enolična: iz vsake točke gre ven kvečjemu ena puščica (ena ali nobena)

92. Kaj je matrika relacije?

Matrika relacije R v (končni množici) A je kvadratna 0/1 tabelica, B®. Elemente množice A uredimo: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$

Vrstice in stolpce matrike B(R) indeksiramo (označimo) po vrsti v tem vrstnem redu.

93. Kako je definirana inverzna relacija?

Naj bo R relacija. Potem je R^{-1} njena inverzna relacija, ki jo definiramo tako:

$R^{-1} \coloneqq \{(y, x); (x, y) \in R\}$

94. Kako je definiran produkt relacij?

Produkt relacij R in S označimo z R*S in ga definiramo tako:

$R * S \coloneqq \{(x, y);\ \exists y(xRy \land yRz)\}$

95. Kaj je tranzitivna ovojnica

Naj bo R relacija v A. Relacijo R^+ imenujemo tranzitivna ovojnica in jo definiramo:

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

96. Kaj je tranzitivno-refleksivna ovojnica?

Naj bo R relacija v A. Relacijo R^* imenujemo tranzitivno-refleksivna ovojnica in jo definiramo:

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

97. Kaj je funkcija?

Funkcija je enolična relacija.

Relacija $f \subseteq A \times B$ je preslikava iz A v B, če velja:

a) f je enolična
b) Df = A
c) $(Zf \subseteq B)$

98. Kako je definirana funkcija (kateri dogovori veljajo)?

Dogovor: pišemo tudi f: A --> B

Namesto xfx pišemo y = f(x) …. Pravimo da f (pre)slika x v y

X je argument, y pa vrednost funkcije/preslikave f pri x

99. Kdaj je funkcija injektivna, surjektivna, bijektivna?

Naj bo f: A --> B. Pravimo, da je f:

a) Injektivna, če velja: $\forall x, y \in A : (f(x) = f(y) => x = y)$
b) Surjektivna, če je Zf = B (pravimo tudi, da f presila iz A na B)
c) Bijektivna, če je surjektivna in injektivna

100. Kdaj je f^{1} tudi funkcija oz. preslikava?

Naj bo f: A --> B. Potem je:

a) f^{1} je enolična (funkcija) natanko tedaj, ko je f injektivna
b) f^{1}: B --> A natanko tedaj, ko je f bijektivna

101. Kaj je kompozitum?

Kompozitum preslikav je asociativna operacija, saj velja: (f o g) o h = f o (g o h)

102. Kako je definiran kompozitum?

Naj bosta f: A --> B in g: B --> C. Potem je g o f preslikava iz A v C, določena s predpisom g o f = f*g

Velja (g o f)(a) = g(f(a)) za vse $a \in A$

103. Naštej lastnosti kompozituma

Trditev: Naj bo f: A --> B. Potem je: f o id_a = id_b o f = f

Trditev: f : B --> C, g : A --> B

a) $f, g\ injektivni \quad => \quad f \circ g\ injektivna$
b) $f, g\ surjektivni \quad => \quad f \circ g\ surkejtivna$
c) $f \circ g\ injektivna \quad => \quad g\ injektivna$
d) $f \circ g\ surjektivna \quad => \quad f\ surjektivna$

104. Kaj pravi Dirichletov princip?

Naj bo A končna množica in f: A --> A. Potem so naslednje trditve enakovredne:

a) f je injektivna
b) f je surjektivna
c) f je bijektivna

105. Kako je definirana ekvivalenčna relacija?

$R \subseteq A \times A$ je ekvivalenčna če je:

a) Refleksivna
b) Simetrična
c) Tranzitivna

106. Kaj je kongruenca?

Kongruenca po modulum je ekvivalenčna relacija. Usklajena je s seštevanjem in množenjem.

107. Kdaj relacija delno ureja množico?

Naj bo R relacija v množici A. Relacija R delno ureja množico A, če je:
Refleksivna, antisimetrična, tranzitivna

108. Kdaj relacija linearno ureja množico?

Naj bo R relacija v množici A. Relacija R delno ureja množico A, če:
R delno ureja A in R je sovisna

109. Kaj je Hassejev diagram?

Hassejev diagram je slikovni prikaz delne urejenosti.

110. Kaj je to ekvivalenčni razred?

Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna in $x \in A$. Potem je $R[x] = \{y \in A; yRx\}$ je ekvivalenčni razred elementa x.
Trditev: Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem za poljubna $x, y \in A$ velja:
$R[x] = R[y] <=> xRy$

Diofantske enačbe

111. Kako dobimo največji skupni delitelj?

Največji skupni delitelj GCD dobimo kot zadnji ne ničelni ostanek v razširjenem Evklidovem algoritmu (REA). Obenem gcd(m, n) zapišemo kot celoštevilsko linearno kombinacijo števil m in n

112. Kdaj sta si števili tuji?

Števili a in b sta si tuji, če imata za največji skupni delitelj le število 1. Pišemo: gcd(a, b) = 1

113. Kaj je diofantska enačba?

Diofantska enačba je enačba z dvema neznankama. Zapišemo jo v obliki ax + by = c, kjer so a, b in c elementi celih števil ter iščemo celoštevilsko rešitev x, y.

114. Kaj je praštevilo?

Praštevilo je število, ki ima natanko dva pozitivna delitelja: število 1 in samega sebe.

Grafi

115. Kaj je graf?

Graf je urejen par G = (V, E), kjer je:

a) V je neprazna množica točk (vozlišč) grafa G
b) E je množica povezav grafa G, pri čemer je vsaka povezava par točk

116. Kdaj sta u in v sosednji točki?

Točki u in v sta sosedi, kadar sta krajišči iste povezave e (povezava e povezuje točki u in v). To označimo z u ~ v.

117. Kaj je stopnja točke?

Stopnja točke $v \in V(G)$ je število povezav, ki imajo v za krajišče. Stopnjo točke v označimo z deg(v).

118. Kaj je list in kaj izolirna točka?

Točka stopnje 0 je izolirna točka (torej nima sosednjih točk). Točki stopnje 1 pa pravimo tudi list grafa.

119. Kdaj je graf regularen oz. d-regularen?

Graf G je regularen če imajo vse njegove točke isto stopnjo.
Graf G je d-regularen, če imajo vse njegove točke stopnjo d.

120. Kaj pravi lema o rokovanju?

Naj bo G graf z n točkami in m povezavami. Potem je:

$$\sum_{t=1}^{n} \deg(v_t) = 2 \times m$$

Posledica: V vsakem grafu je sodo mnogo točk lihe stopnje.
Posledica: Naj bo G d-regularen graf z n točkami in m povezavami. Potem je n * d = 2 * m

121. Kaj je grafično zaporedje?

Končno zaporedje naravnih števil d_1 >= d_2 >= d_3 … d_n je grafično, če obstaja graf G z n točkami, ki imajo stopnjo enake d_1, d_2, d_3 … d_n

Posledica: zaporedje d_1 >= d_2 >= d_3 … d_n je grafično natanko tedaj, ko požrešna metoda uspe

122. Kdaj pravimo da sta grafa izomorfna?

Grafa G in H sta izomorfna, če obstaja preslikava f: V(G) --> V(H), za katero velja:

a) F je bijektivna
b) U ~ g v <=> f(u) ~ h f(v)

Trditev: izomorfizem ohranja število vozlišč, število povezav, stopnjo vozlišč, število trikotnikov …

V nasprotnem primeru pravimo da sta grafa neizomorfna

123. Kdaj je graf poln?

Graf je poln, če sta vsaki njegovi točki sosedi. Poln graf na n točkah označimo z k_n

124. Kdaj je graf prazen?

Graf je prazen, če nobeni njegovi točki nista sosedi. Prazen graf na n točkah označimo z $\overline{kn}$

125. Kaj je polni dvodelni graf?

$K_{m, n}$ je polni dvodelni graf na n+m točkah. Vsebuje dva barvna razreda s po n in m točkami, točki sta sosedi natanko tedaj, ko sta v različnih barvnih razredih.

126. Kako je definiran podgraf?

Naj bosta H in G grafa. Pravimo, da je H podgraf grafa G (pišemo $H \subseteq G$), če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$

127. Kaj je vpet podgraf?

Podgraf grafa G je vpet podgraf, če je V(H) = V(G)

128. Kaj je induciran podgraf?

Podgraf grafa G je induciran podgraf, če za vsako povezavo $e = uv \in E(G)$ velja: če sta u in v vozlišči grafa E, potem je tudi e povezava v grafu H

129. Kaj je sprehod v grafu?

Sprehod S v grafu G=(V, E) je zaporedje vozlišč u_0, u_1, u_2 … u_n pri čemer sta zaporedni vozlišči sprehoda u_i in u_{i+1} sosedi v grafu G

Dolžina sprehoda S = u_0, u_1, u_2 … u_n je enaka n. Pišemo: |S| = n.

130. Kaj pravi lema o sprehodu v grafu?

Če v grafu G = (V, E) obstaja u – v sprehod S potem v G obstaja tudi u – v pot.

Posledica: najkrajši u – v sprehod v grafu je pot.

131. Kdaj je graf povezan?

Graf G je povezan, če za vsaki dve vozlišči $u, v \in V(G)$ v grafu G obstaja u – v sprehod.

132. Kdaj je graf dvodelen?

Graf G je dvodelen, če lahko točke grafa G pobarvamo z dvema barvama tako, da ima vsaka povezava krajišči različnih barv.
Izrek: Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko G ne vsebuje ciklov lihe dolžine.

133. Kdaj je sprehod v grafu enostaven?

Sprehod v grafu G je enostaven, če vsako povezavo uporabi največ enkrat

134. Kaj je Eulerjev obhod?

Eulerjev obhod je enostaven sprehod v grafu G, ki vsebuje vse povezave in vse točke grafa.

135. Kdaj je graf Eulerjev?

Graf G je Eulerjev, če ima kak Eulerjev obhod.

136. Kaj pravi Eulerjev izrek?

Graf G je Eulerjev natanko tedaj, ko je G povezan in so vse njegove točke sodih stopenj.
Posledica: Graf G je Eulerjev natanko tedaj, ko ga lahko narišemo z eno samo potezo, ki je povrh vsega še sklenjena.

137. Razloži Eulerjevo formulo!

n … št. Točk grafa   m … št. Povezav grafa   f … št. Lic grafa
Formula: n – m + f = 2

138. Kaj je Hamiltonov cikel?

Hamiltonov cikel je takšen cikel v grafu G, ki vsebuje vse točke grafa G

139. Kdaj je graf Hamiltonov?

Graf G je Hamiltonov, če vsebuje kak Hamiltonov cikel

140. Kaj pravi Diracov zadostni pogoj (izrek) ?

Naj bo G graf z vsaj tremi točkami (|V(G)| = n >= 3). Če za vsako točko $v \in V(G)$ velja: deg(v) >= n/2, potem je graf Hamiltonov.
Komentar: Pogoj je zadosten. To pomeni da je vsak graf, ki izpolni omenjeni pogoj Hamiltonov. Ni pa res, da bi vsak Hamiltonov graf izpolnil ta pogoj.

141. Kaj je potrebni pogoj za Hamiltonov graf (izrek) ?

Naj bo G povezan graf. Denimo da obstaja takšna podmnožica točk $S \subseteq V(G)$ moči |S| = k, za katero velja, da ima G-S vsaj k+1 povezanih komponent. Potem G ni Hamiltonov.

Komentar: Pogoj, da v grafu takšna množica S ne obstaja, je potreben. To pomeni, da vsak Hamiltonov graf zadošča temu pogoju. Toda če graf pogoju zadošča, to še ne pomeni da je Hamiltonov.

142. Kaj je drevo?

Drevo je povezan graf brez ciklov

143. Kaj je gozd?

Gozd je graf brez ciklov

144. Kakšna je povezava med drevesi in gozdovi (trditev)?

G je gozd <=> povezane komponente G so drevesa.

G je drevo <=> G je povezan gozd

145. Kaj je prerezna točka?

$v \in V(G)$ je prerezna točka grafa G, če ima G – v strogo več povezanih komponent kot G.

146. Kaj je prerezna povezava?

$e \in E(G)$ je prerezna povezava grafa G, če ima G – e strogo več povezanih komponent kot G.

Trditev: $e \in E(G)$ je prerezna povezava natanko tedaj, ko e ne leži na nobenem ciklu g grafa G

147. Kaj je vpeto drevo?

Naj bo G graf in $H \subseteq G$. H je vpeto drevo v G, če je:

a) H je vpet podgraf v G
b) H je drevo

148. Kdaj je graf povezan?

Graf G je povezan natanko tedaj, ko ima vsaj eno vpeto drevo.

149. Kaj lahko poveš o barvanju grafa?

k-barvanje točk grafa G je preslikava c: V(G) --> {1, 2, 3 … k } za katero velja, da je $c(u) \neq c(v)$. To pomeni, da morata biti krajišči vsake povezave različnih barv. Najmanjše naravno število k, za katerega obstaja k-barvanje točk grafa G, imenujemo kromatično število grafa G.

Z $\omega(G)$ označimo velikost največjega polnega podgrafa v G.

Velja $\omega(G) \leq 2$ natanko tedaj, ko je G brez trikotnikov.

$\Delta(G)$ označuje največjo stopnjo točke v grafu G

z $\delta(G)$ pa označimo najmanjšo stopnjo točke grafa G.

150. Kaj je subdivizija grafa?

Graf H je subdivizija grafa G, če graf H dobimo iz grafa G tako, da na vsaki povezavi dodamo nekaj (nič ali več) točk stopnje 2.

151. Kdaj je graf ravninski?

Graf G je ravninski, če ga lahko narišemo v ravnini R^2 tako, da se povezave ne sekajo, razen v skupnih krajiščih.

Izrek (Kuratowski): Graf G je ravninski natanko tedaj, ko G ne vsebuje podgrafa izomorfnega subdiviziji k_5 ali k3,3.

152. Kaj je lice oz. risba grafa?

Naj bo G ravninski graf in $S(G) \subseteq R^2$ njegova risba, na kateri se povezave (razen v skupnih krajiščih) ne sekajo. Povezana območja množice $R^2 \ \backslash S(G)$ so lica (risbe) grafa G.

153. Kaj pravi izrek o ravninskih grafih?

Ravninski graf z n >= 3 točkami ima največ 3n – 6 povezav.

Izrek: Ravninski graf z n >= 3 točkami ima največ 3n – 6 povezav.

Posledica: Če je G ravninski graf, potem je $\sigma(G) \leq 5$

Posledica: K_5 ni ravninski graf. Za n >= 5 graf K_n ni ravninski.

Izrek: Dvodelni ravninski graf z n >= 3 točkami ima največ 2n – 4 povezav

Posledica: $K_{3,3}$ ni ravninski graf. Za m >= n >= 3 graf $K_{m,\ n}$ ni ravninski.

Permutacije

154. Kaj je permutacija?

Naj bo A poljubna množica. Permutacija na A je vsaka bijektivna preslikava f: A --> A.

155. Kako zapisujemo permutacije?

Vsako permutacijo lahko zapišemo s tabelico ali pa z disjunktivnimi cikli.

156. Kaj je ciklična struktura permutacije?

Ciklična struktura permutacije je število dolžin posameznih ciklov v zapisu permutacije z dijunktivnimi cikli.

1 – ciklu pravimo tudi fiksna točka permutacije,

2 – ciklu pa transpozicija

157. Ali je produkt transpozicij enolično določen?

Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt transpozicij. Ker zapis cikla ni enoličen tudi zapis kot produkt transpozicij ni enolično določen.

158. Kaj pravi izrek o parnosti permutacij?

Denimo, da lahko permutacijo π zapišemo kot produkt m transpozicij, pa tudi kot produkt (morda drugih) n transpozicij. Potem je: $m \equiv n \ (mod\ 2)$

159. Kdaj je permutacija soda?

Permutacija je soda, če jo lahko zapišemo kot produkt sodo mnogo transpozicij.

160. Kdaj je permutacija liha?

Permutacija je liha, če jo lahko zapišemo kot produkt liho mnogo transpozicij.

161. Kdaj pravimo, da sta števili v inverziji?

Pravimo, da sta (v permutaciji π) števili m in n v inverziji, če sta v spodnji vrstici tabelice v napačnem vrstnem redu: m je pred n, toda n je zapisan pred m.

162. Kaj je red permutacije?

Red permutacije π je najmanjše naravno število $k >= 1$, za katerega je $\pi^k = id$

Trditev: Red permutacije π je najmanjši skupni večkratnik dolžin ciklov v zapisu permutacije π z disjunktivnimi cikli.