REŠITVE 1. kolokvija iz diskretnih struktur
Ljubljana, 20. november 2002

1. Induktivni naravnih števil $\mathcal{J}$ ima v bazi število 1, določajo pa ga pravila:

   Q_1: $n \to n+5$
   Q_2: $n \to n+7$
   Q_3: $n \to n+9$

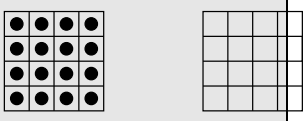
   (a) Katera od števil 14, 15, 16, 17 in 18 pripadajo razredu $\mathcal{J}$?

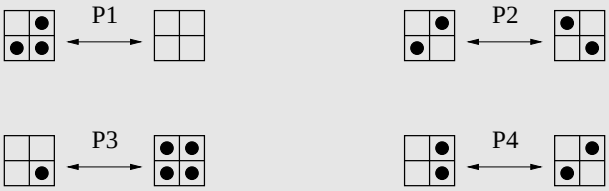
   (b) Pokaži, da obstaja največje naravno število N, ki ne pripada $\mathcal{J}$.
   ($\mathcal{J}$ vsebuje vsa naravna števila, ki so večja od N.)

Ker je $15 = 1+7+7$, $16 = 1+5+5+5$, $17 = 1+9+7$ in $18 = 1+5+5+7$, števila 15, 16, 17 in 18 pripadajo razredu $\mathcal{J}$. Število 14 razredu ne pripada: če uporabimo katerokoli od pravil kvečjemu enkrat, ne moremo konsruirati števil večjih od 9, če konstrukcijsko zaporedje uporabi tri (ne nujno) različna pravila, je dobljeno število vsaj 16. V primeru, ko uporabimo natanko dve pravili, pa je rezultat liho število, zato je 14 nemogoče konstruirati.

Ker velja tudi $19 = 1+9+9$, razred $\mathcal{J}$ vsebuje pet zaporednih naravnih števil. Z nadaljno uporabo pravila Q_1 lahko konstruiramo vsa večja naravna števila, 14 pa je največje število, ki ga $\mathcal{J}$ ne vsebuje.

2. Baza induktivnega razreda $\mathcal{I}$ šahovnic velikosti 4×4 s krožci vsebuje polno in prazno šahovnico. Prikazani sta na desni sliki. Pravila so štiri, delujejo v obe smeri, poleg tega pa jih lahko uporabljamo tudi zasukano (levo in desno 2×2 šahovnico v opisu pravila hkrati zasukamo za kot 0, 90, 180 ali 270 stopinj). Prikazana so spodaj.





   (a) Pokaži, da nobena šahovnica iz $\mathcal{I}$ ne vsebuje natanko dveh krožcev.

   (b) Poišči konstrukcijsko zaporedje za katerokoli izmed šahovnic z enim samim krožcem.

   (c) Pokaži, da induktivni razred $\mathcal{I}$ vsebuje vse šahovnice z enim krožcem.

Pravila ohranjajo ostanek števila krožcev pri deljenju s tri. V bazi imamo šahovnico s 16 krožci (ostanek je 1) in prazno šahovnico (ostanek 0). Šahovnice z dvema krožcema zato ne moremo konstruirati.

Opis konstrukcije poljubne šahovnice z enim samim krožcem. Tako šahovnico bomo razgradili do šahovnice z vsemi 16 krožci. Privzamemo lahko (zaradi simetrije "ahovnice), da je krožec v desnem zgornjem 2×2 kvadratu. S pravilom $P3$ omenjeni 2×2 kvadrat napolnemo.

Nato s trikratno uporabo pravila $P1$ v preostale vogalne 2×2 kvadrate položimo po 3 krožce v vsakega, in sicer tako (uporabimo zasuk pravila), da so prazna natanko tri polja v srednjem 2×2 kvadratu. Le-tega napolnemo s pravilom $P3$.

3. Dan je veznik $A(p,q,r) \equiv p \veebar (q \vee r)$. Za nabora $\{A, 1\}$ in $\{A, \wedge\}$ določi, če sta polna ali ne. Z vezniki iz polnega nabora izrazi veznik $\uparrow$.

Nabor $\{A, \wedge\}$ ni poln, saj oba veznika ohranjata vrednost 0.

Nabor $\{A, 1\}$ je poln. Izrazimo lahko negacijo ($A(1,p,p) \sim \neg p$) in disjunkcijo ($A(A(1,1,1),p,q) \sim p \vee q$).

$$p \uparrow q \sim \neg p \vee \neg q \sim A(A(1,1,1), A(1,p,p), A(1,q,q))$$

4. Pokaži, da iz predpostavk

   $(r \Rightarrow s) \;\Rightarrow\; w$,
   $r \;\Rightarrow\; t \wedge q$,
   $p \vee \neg t \;\Rightarrow\; s$

   logično sledi zaključek $(q \Rightarrow p) \;\Rightarrow\; w \vee t$.

1. $(r \Rightarrow s) \Rightarrow w$ (predp),
2. $r \Rightarrow (t \wedge q)$ (predp),
3. $(p \vee \neg t) \Rightarrow s$ (predp),
   (a) $q \Rightarrow p$ (predp PS)
      i. $\neg w$ (predp RA)
      ii. $\neg(r \Rightarrow s)$ (MT 1,i)
      iii. $r \wedge \neg s$ ($\sim$ ii)
      iv. r (Po iii)
      v. $\neg s$ (Po iii)
      vi. $t \wedge q$ (MP 2, iv)
      vii. q (Po vi)
      viii. p (MP a,vii)
      ix. $p \vee \neg t$ (Pr viii)
      x. s (MP 3, ix)
      xi. $s \wedge \neg s$ (Zd x,v)
      xii. 0 ($\sim$ xi)
   (b) w (RA i,xii)
   (c) $w \vee t$ (Pr b)
4. $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (w \vee t)$ (PS a,c)