# RELACIJE

D R = { x; Ey : xRy } (domena ali definicijsko območje relacije R)
Z R = {y; Ex : xRy} (zaloga vrednosti relacije R)

## LASTNOSTI RELACIJ

$R$ *refleksivna* $\iff \forall x \in A : xRx$

$R$ *simetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$

$R$ *antisimetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

$R$ *tranzitivna* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$R$ *sovisna* $\iff \forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$

$R$ *enolična* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$

R **refleksivna:** vsak element mora biti v relaciji sam s sabo
R **simetrična:** vsak prvi element (x) mora biti v relaciji z drugim (y) in drugi mora biti v relaciji s prvim (obojestranska relacija – puščice so dvosmerne)
R **antisimetrična:** iz aRb in bRa sledi, da je a = b
R **tranzitivna:** ko je aRb in bRc potem obstaja bližnjica aRc
R **sovisna:** ko x ni enak y sledi, da je xRy ali yRx
R **enolična:** ko je xRy in xRz potem je y = z

R **ekvivalenčna:** če je relacija refleksivna, simetrična in tranzitivna

**Ekvivalenčni razredi:** R[x] = {y je element množ. A; yRx} je ekvivalenčni razred elementa x. V razredu so elementi, ki so ekvivalenčni med seboj.

**Komplement relacije:** $R^c := (A \times A) \setminus R = U_A \setminus R$
vse možne povezave (med točkami), ki jih na grafu R ni.

**Inverzna relacija:** $R^{-1} := \{(y, x) \,;\, (x, y) \in R\}$
na grafu obrnemo puščice, če je xRy potem je y $R^{-1}$ x.

**Produkt relacij:** $R * S := \{(x, z) \,;\, \exists y\, (xRy \wedge ySz)\}$

**Potence relacij:**
$$R^0 := \mathrm{id}_A \quad R^1 = R,\ R^2 = R * R$$
$$R^{n+1} := R^n * R, \text{ če je } n \geq 0$$
$$m, n \geq 0 \text{ tudi } R^m * R^n = R^{m+n}$$
$$R^{-n} := (R^{-1})^n$$
Toda če sta $m$ in $n$ celi števili različnih predznakov, potem $R^n * R^m$ ni nujno enako $R^{m+n}$.

**Tranzitivna ovojnica:** $R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$

če je R tranzitivna relacija potem je $R^+$ = R
To je najmanjša tranzitivna relacija, vsebuje R in unijo relacij do relacije, ki je tranzitivna.

**Tranzitivno refleksivna ovojnica:** $R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$

enako kot tranzitivna le, da ta vsebuje tudi id R, zato je refleksivna.

## LASTNOSTI POTENC RELACIJ:

*refleksivna* $\iff \mathrm{id}_A \subseteq R$

*simetrična* $\iff R^{-1} = R$

*antisimetrična* $\iff R^{-1} \cap R \subseteq \mathrm{id}_A$

*tranzitivna* $\iff R^2 \subseteq R$

*sovisna* $\iff \mathrm{id}_A \cup R \cup R^{-1} = U_A$

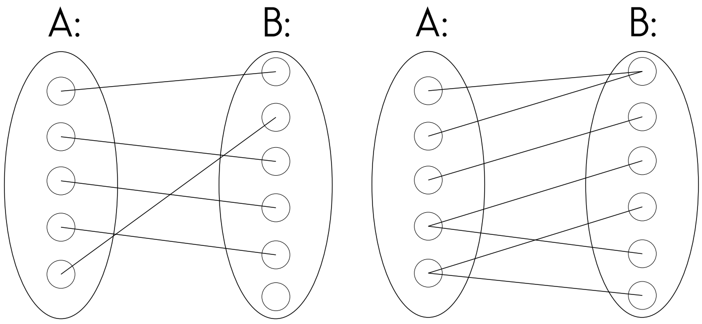
*enolična* $\iff R^{-1} * R \subseteq \mathrm{id}_A$

# FUNKCIJE IN PRESLIKAVE

**Injektivna:** če preslika različne podatke v različne rezultate

**Surjektivna:** če je vsak element množice B slika nekega elementa x iz množice A.
To pomeni, da je realna funkcija f surjektivna, če je njena zaloga vrednosti enaka množici vseh realnih števil

**Bijektivna:** če je injektivna in surjektivna




INJEKTIVNA SURJEKTIVNA

Enolično relacijo imenujemo *funkcija*.

Relacija $f \subseteq A \times B$ je *preslikava iz $A$ v $B$*, če velja:

- $f$ je enolična
- $\mathcal{D}_f = A$
- $(\mathcal{Z}_f \subseteq B)$

Pišemo tudi $f : A \to B$.

# GRAFI

Graf je **urejen par G = (V, E)** , kjer je **V neprazna množica točk** (vozlišč) grafa in **E množica povezav** grafa G

**Stopnja točke** v je število povezav, ki imajo v za krajišče.
Stopnjo točke v označimo z **deg(v)**.

**Točka stopnje 0 je izolirana točka,** točki stopnje 1 pravimo tudi **list grafa**.

Graf G je **regularen**, če imajo **vse** njegove **točke** isto stopnjo.

Graf G je **d-regularen**, če so **vse točke** grafa G **stopnje d**.

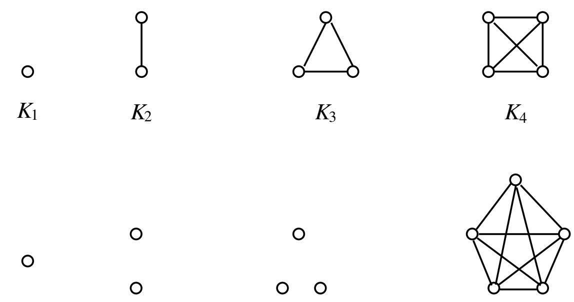
**3-regularnim** grafom pravimo tudi **kubični graf.**

V vsakem grafu je **sodo** mnogo točk **lihe stopnje**.

Ali je **zaporedje grafično** (**ni** če ima **liho število točk lihih stopenj**) preverimo tako, da bi pri npr. 6443221 vzeli največjo stopnjo in jo izbrisali in nato (v tem primeru 6) zmanjšali toliko naslednjih stopenj za 1 kolikor je velika stopnja, ki smo jo vzeli. Zaključimo, ko: - dobimo negativno število (neuspešno), - zaporedje je prekratko (neuspešno), ali ko v zaporedju dobimo same **ničle** (**uspešno**)

**Graf je poln**, če je vsaka točka v grafu sosedna z vsako drugo točko.

**Graf je prazen**, če je brez povezav.

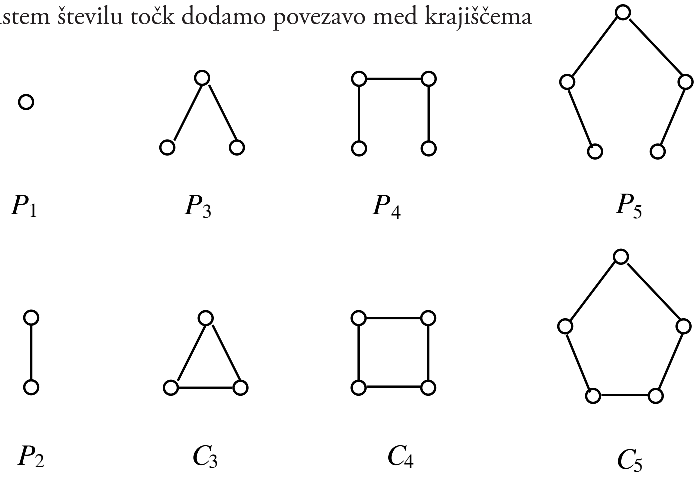


$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$

$\overline{K_1}$ $\overline{K_2}$ $\overline{K_3}$ $K_5$

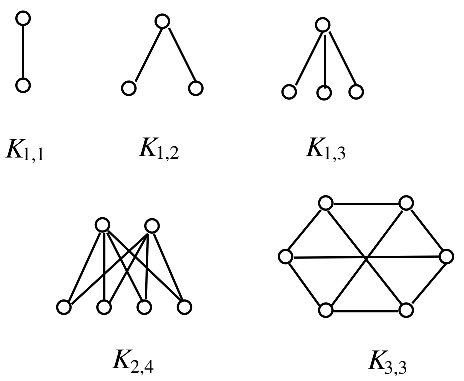
**Pot** na n točkah označimo s $P_n$. Točke poti lahko uredimo po vrsti od prvega do zadnjega, pri čemer je prva točka soseda z drugo, druga s tretjo, . . . in predzadnja z zadnjo.

**Cikel** je graf z vsaj tremi točkami, ki ga dobimo tako, da v poti na istem številu točk dodamo povezavo med krajiščema

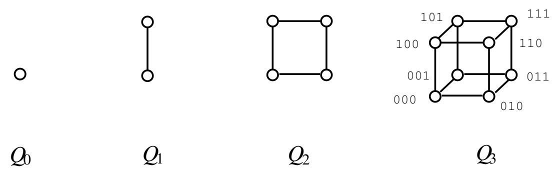



Graf je **poln dvodelen**, če lahko množico njegovih točk razbijemo v dve podmnožici, ki jima pravimo barvna razreda grafa

d-razsežno **hiperkocko** Qd, d >= 1, najlaže opišemo takole: točke d-razsežne hiperkocke so zaporedja ničel in enic dolžine d. Dve točki-zaporedji pa sta sosedi, če se razlikujeta v natančno enem členu.




Slika 3: Polni dvodelni grafi.

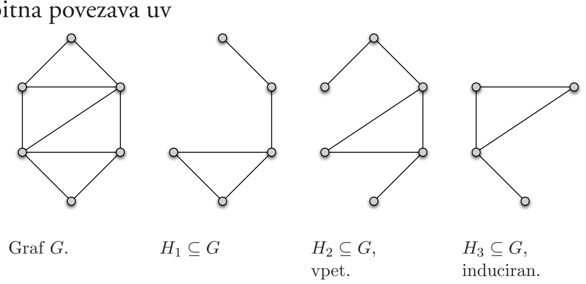



Slika 4: Hiperkocke.

**Komplement grafa G** je graf z isto množico točk, dve točki pa sta sosedi v grafu G natanko tedaj, ko nista sosedi v grafu G

**Vpeti podgrafi** grafa G vsebujejo vse točke originalnega grafa. Za povezave to ne velja nujno.

**Inducirani podgrafi** ne vsebujejo nujno vseh točk niti vseh povezav grafa G. Toda če v induciranem podgrafu preživita dve točki u in v originalnega grafa G, potem mora v tak snem podgrafu preživeti tudi morebitna povezava uv




Graf G = (V, E) je **dvodelen**, če lahko točke grafa V (G) razbijemo na dve podmnožici. Če graf vsebuje cikel lihe stopnje potem graf ni dvodelen.

**Kromatično število** grafa G je najmanjše zadostno število barv, ki jih potrebujemo za barvanje točk grafa G. Če je v grafu kolo potem je kromatično število najmanj 3, če pa je kolo lihe stopnje pa najmanj 4.

**Sprehod** S v grafu G = (V, E) je zaporedje vozlišč

Graf G je **povezan**, če za vsaki dve vozlišči v grafu G obstaja u - v sprehod

**Razdalja med točkama** u in v v grafu G **dist(u, v)**, je dolžina najkrajše u - v poti (sprehoda) v G.

Graf G je **Eulerjev** natanko tedaj, ko je G povezan in so vse njegove točke **sodih** stopenj. Enostaven obhod v grafu G, ki vsebuje vse povezave in vse točke imenujemo Eulerjev obhod.

**Drevo** je povezan graf brez ciklov.

**Gozd** je graf brez ciklov.

**Lastnosti dreves:**

- T je povezan graf.
- T je brez ciklov.
- m = n - 1.
- Vsaka povezava v T je prerezna.
- Za poljubni točki u v obstaja natančno ena u - v pot v T.
- Če drevesu T dodamo katerokoli novo povezavo, vsebuje dobljeni graf natanko en cikel.

Cikel v grafu G je **Hamiltonov,** če vsebuje vse točke grafa G
Če za vsako točko velja $v \in V(G)$ *velja* $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$
potem **je Hamiltonov**
(ni pa res, da bi vsak Hamiltonov graf izpolnil zgornji pogoj)

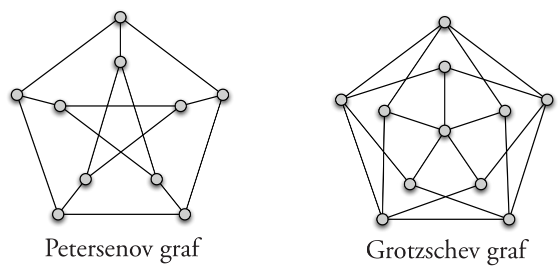
Če odstranimo k točk iz grafa in graf razpade na k + 1 komponent potem graf **ni Hamiltonov.**

Z $\omega(G)$ označimo velikost največjega *polnega podgrafa* v $G$.

Velja $\omega(G) \leq 2$ natanko tedaj, ko je $G$ *brez trikotnikov*.

$\Delta(G)$ označuje *največjo stopnjo* točke v grafu $G$,
z $\delta(G)$ pa označimo *najmanjšo stopnjo* točke grafa $G$.

**Premer** grafa je največja razdalja med dvema poljubnima paroma točk
**Ožina grafa** je dolžina najkrajšega cikla




Grafa sta **izomorfna,** če imata enako število vozlišč, število povezav, stopnje vozlišč, število trikotnikov, število enakih ciklov, kromatično število, ...

## TEORIJA ŠTEVIL

**gcd (m, n)** = največji skupni delitelj števil m in n (predzadnja vrstica REA)

**lcm (m, n)** = najmanjši skupni večkratnik števil m in n (zmnožek koeficientov zadnje vrstice REA)
**Diofantske enačbe:** če desna stran enačbe (številka) ni deljiva z gcd je enačba nerešljiva