A delno urejena z ≤.

Včasih lahko definiramo relacijo <•
x<•y ... x "neposredni predhodnik« y

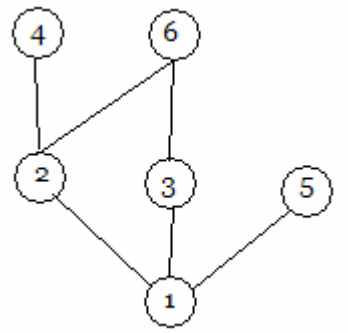
HASSEJEV DIAGRAM RELACIJE ≤

Naj bo A delno urejena z ≤.
Elementi množice A ... točke v ravnini (krožci)

x<•y ... daljica med ustreznima krožcema, ki gre od x-a do y-ona navzgor!!

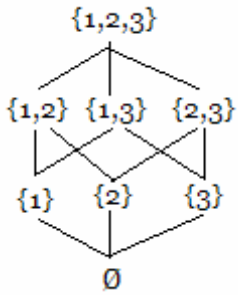
Velja: x≤y ... od x-a do y-ona se da priti po vzpenjajoči se poti

Zgledi:
1) A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
relacija |



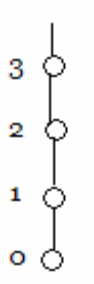
komentar: krožca, ki sta povezana, se razlikujeta za praštevilski faktor

2) A = { 1, 2, 3 }
PA, ⊆
PA = { Ø, ..., {1, 2, 3}}

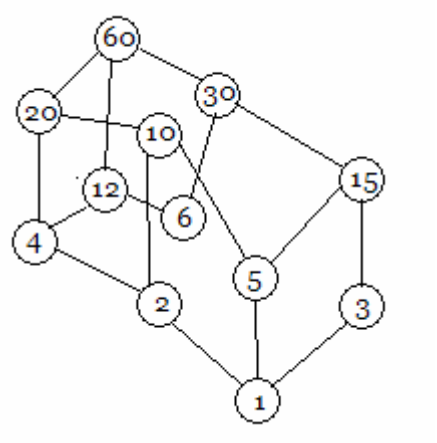


komentar: poveyana raylika v enem elementu

3) N = { 0, 1, 2, ... }
≤



4) delitelji števila 60, |
{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 }



POSEBNI ELEMENTI V DELNO UREJENIHH MNOŽICAH

Def.: A delno ureja z $\leq$.
m je minimalen (v A za $\leq$) $\Leftrightarrow \forall x \in A\ (x \leq m \Rightarrow x = m)$
M je maksimalen $\Leftrightarrow \forall x \in A\ (M \leq x \Rightarrow x = M)$
a je prvi $\Leftrightarrow \forall x \in A\ (a \leq x)$
b je zadnji $\Leftrightarrow \forall x \in A\ (x \leq b)$

Zgledi:

	1)	2)	3)	4)
minimalni	1	Ø	0	1
maksimalni	4, 5, 6	{ 1, 2, 3 }	/	60
prvi	1	Ø	0	1
zadnji	/	{ 1, 2, 3 }	/	60

Trditev: A delno ureja z $\leq$.
1) $a \in A$ prvi $\Rightarrow$ a minimalen
2) $a \in A$ zadnji $\Rightarrow$ a maksimalen
3) a_1, a_2 prva $\Rightarrow a_1 = a_2$
4) a_1, a_2 zadnja $\Rightarrow a_1 = a_2$

Dokaz 1): a prvi element
a ni minimalen $\exists b \in A\ (b \leq a$ in $b \neq a)$
ker je a prvi: $b \geq a$
$b \geq a$ in $a \geq b$ in $a \neq b$. →← (protislovje z antisimetrijo $\leq$)

Dokaz 3): a_1 prvi: $a_1 \leq a_2$
a_2 prvi: $a_2 \leq a_1$

$a_1 = a_2$
zaradi antisimetričnosti relacije $\leq$.

Def.: Če v A obstaja prvi element, ga označimo z min(A).
Če v A obstaja zadnji element, ga označimo z max(A).

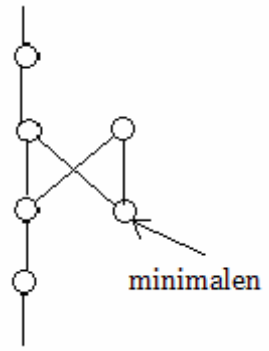
Trditev: Naj bo A linearno urejena z $\leq$.
1) Če je $a \in A$ minimalen $\Rightarrow$ a prvi
2) Če je $a \in A$ maksimalen $\Rightarrow$ a zadnji

Komentar:
Minimalni element $\equiv$ prvi element v linearni urejenosti.
Podobno za maksimalni in zadnji element.

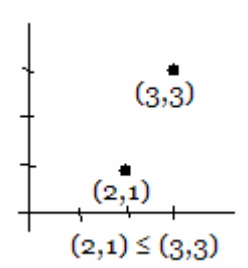
Trditev:
1) R delno ureja A $\Rightarrow$ R^{-1} delno ureja A
a minimalen za R $\Leftrightarrow$ a maksimalen za R^{-1}
a prvi za R $\Leftrightarrow$ a zadnji za R^{-1}
2) R linearno ureja A $\Rightarrow$ R^{-1} linearno ureja A

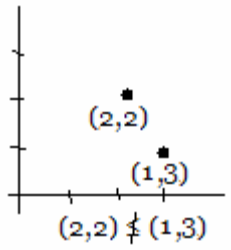
Dokaz DN

Zgled:



Zgled: $(N,\leq)$, $(N,\leq)$
$(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow (a \leq c)$ in $(b \leq d)$ (def)
produktna urejenost





<u>Def</u>.: A delno urejena z $\leq$
B delno urejena z $<\leq$

Leksikografska urejenost $\leq_{lex}$
je relacija v AxB.
$(a,b)\leq_{lex}(a'b,b') \Leftrightarrow$ a < a' ali
a = a' in b $<\leq$ b'.

<u>Trditev</u>: Če A delno urejena z $\leq$ in B delno urejena z $\leq'$
Potem je AxB delno urejena z $\leq_{lex}$.
Če sta A in B linearno urejeni, potem $\leq_{lex}$ linearna urejenost.

<u>Zgled</u>: Leksikografska urejenost na besedah dolžine 2.
Besede dolžine 2 so
AA, AB, AC, AD, ..., AŽ, BA, BB, ..., BŽ, ..., ŽA, ŽB, ..., ŽŽ
Leksikografsko urejanje ≡ urejanje po abecedi

<u>Zgled</u>: Posplošitev leksokografske urejenosti na zaporedja (besede) poljubnih dolžin.
STOL $\leq_{lex}$ TORBA, ker S<T
TOLPA $\leq_{lex}$ TORBA, ker T=T in OLPA $\leq_{lex}$ ORBA
ker T=T in O=O in L<R

$R\subseteq AxA$, $R|_B := R\cap BxB$ je relacija v B, če $B\subseteq A$.

<u>Trditev</u>: Če R delno ureja A, potem $R|_B$ delno ureja B.
Če R linearno ureja A, potem $R|_B$ linearno ureja B.

<u>Dokaz DN</u>

<u>Komentar</u>: Vsaka podmnožica delno/linearno urejene množice je delno/linearno urejena z »isto« relacijo. Zato lahko govorimo o minimalnih/maksimalnih/prvih/zadnjih elementih v B.

<u>Def</u>.: A delno urejena z $\leq$, $B\subseteq A$.

$a \in A$ je <u>zgornja meja</u> za B $\Leftrightarrow \forall b \in B$: $b \leq a$.
$a \in A$ je <u>spodnja meja</u> za B $\Leftrightarrow \forall b \in B$: $a \leq b$.

<u>Zgledi</u>:

1) A = R, B = [0,1], ≤
zgornje meje za B: vsa števila $x \geq 1$.
spodnja meja za B: vsa števila $x \leq 0$.
max(B) = 1
min(B) = 0
sup(B) = 1
inf(B) = 0

2) A = N, B = { 12, 18, 24 }, | deljivost
zgornje meje za B: skupni večkratniki števil 12, 18, 24
spodnje meje za B: skupni delitelji števil 12, 18, 24 = { 1, 2, 3, 6 }
max(B) ne obstaja
min(B) ne obstaja
sup(B): 72 (najmanjši skupni večkratnik)
inf(B): 6 (največji skupni delitelj)

3) A = R, B = (0,1), ≤
zgornje meje za B: $[1,\infty)$
spodnje meje za B: $(-\infty,0]$
max(B): ne obstaja
min(B): ne obstaja
sup(B) = 1
inf(B) = 0

<u>Def</u>.: A delno urejena z ≤, $B \subseteq A$
M = { zgornje meje za B v A }
m = { spodnje meje za B v A }
Če v M obstaja prvi element, je ta element <u>najmanjša zgornja meja</u> (natančna <u>zgornja meja</u>, <u>supremum</u>) množice B v A. Oznaka: sup(B)
Če v m obstaja zadnji element, je ta element <u>največja spodnja meja</u> (natančna <u>spodnja meja</u>, <u>infimum</u>) množice B v A. Oznaka: inf(B)

MOČ MNOŽIC

MOČ KONČNIH MNOŽIC

<u>Oznaka</u>: A končna množica, potem je |A| <u>število elementov</u> množice A oziroma <u>moč</u> množice A

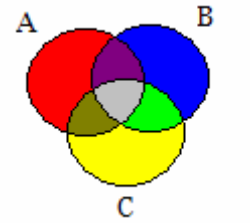
<u>Zgledi</u>: $|\emptyset| = |\{\}| = 0$
$|\{1,2\}| = 2$
$|\{\{1,2\}\}| = 1$

<u>Trditev</u>: A, B, C končne množice

1) $|A \times B| = |A| * |B|$
2) $|PA| = 2^{|A|}$
3) $|\{f: A \rightarrow B\}| = |B|^{|A|}$
4) $B \subseteq A$: $|A \setminus B| = |A| - |B|$ (v splošnem $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$)
5) $A \cap B = \emptyset$: $|A \cup B| = |A| + |B|$ (v splošnem $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

6) $|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|$

<u>Dokaz 6)</u>: s sličico



<u>Naloga</u>: Koliko je števil na celoštevilskem intervalu [1..96], ki so deljiva s 6 in niso deljiva niti s 24 niti s 32.

A_n ... množica števil iz [1..96], ki so deljiva z n. A_6, A_{24}, A_{32}, ...

$|A_6 \backslash A_{24} \backslash A_{32}| = |A_6 \backslash (A_{24} \cup A_{32})|$

$= |A_6| - |A_6 \cap (A_{24} \cup A_{32})| = |A_6| - |(A_6 \cap A_{24}) \cup (A_6 \cap A_{32})|$

$= |A_6| - (|A_6 \cap A_{24}| + |A_6 \cap A_{32}| - |A_6 \cap A_{24} \cap A32|)$

$= |A_6| - |A_{24}| - |A_{96}| + |A_{96}| = 16 - 4 = \underline{12}$

Kaj je $A_6 \cap A_{24}$? $A_6 \cap A_{24} = A_{24}$

$A_m \cap A_n = A_{low(m,n)}$ ← premisli doma

$A_6 \cap A_{32} = A_{96}$

$A_6 \cap A_{24} \cap A32 = A_{96}$

Koliko je $|A_n|$?

Če n deli 96 je $|A_n| = 96/n$

NESKONČNE MNOŽICE. TEŽAVE.

<u>Def</u>.: Množici A in B sta <u>enako močni</u>, $|A|=|B|$, natanko tedaj, ko obstaja bijektivna preslikava $f:A \rightarrow B$.

<u>Presenetljivo</u>:

$|N| = |2N|$ sodih števil je toliko kot naravnih.

f:n|->2n

f:{0,1,2,3,...} → {0,2,4,6,...} je bijektivna

$|N| = |Z|$

0,1,2,3,4,5,6,7,... bijekcija ↓

0,1,-1,2,-2,3,-3,...

<u>Def</u>.: Množica A je neskončna. Če je enako močna kot katera izmed njenih pravih podmnožic.

Množica je končna natanko tedaj, ko <u>ni</u> neskončna

Hilbert's hotel (google)