3. OBSEG

Def.: Kolobarju (A,+,·,0) pravimo obseg, če je (A\{0},·) grupa.
1 je enota v tej grupi.

Z drugimi besedami:
obseg je kolobar z 1, v katerem je vsak neničelen element obrnljiv za množenje

Zgled: (Q,+,·,0), (R,+,·,0), (C,+,·,0)
Pri naših zgledih "bo" množenje v obsegih komutativno.

Trditev: Enačbi a·x = b in y·a = b sta enolično rešljivi, če je le a ≠ 0.

4. DETERMINANTE

Opazka: računamo v Q ali R!

Determinante srečamo pri reševanju sistemov linearnih enačb

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

Načrt: radi bi se znebili neznanke x_2.
Prvo enačbo pomnožimo z a_{22}, drugo z a_{12} in enačbi odštejemo:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot x_1 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot x_2 = b_1 \cdot a_{22}$$
$$a_{21} \cdot a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot a_{12} \cdot x_2 = b_2 \cdot a_{12}$$
$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) \cdot x_1 = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$
$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

Izrazu v imenovalcu pravimo dvovrstna determinanta

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1$$

$$x = \frac{D_x}{D_s}, \quad y = \frac{D_y}{D_s} \quad \text{če je } D_s \neq 0!$$

n-vrstno determinanto zapišemo kot

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} \left(\pm \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} \right)$$

±: če je permutacija π soda, potem je v enačbi +
če je permutacija π liha, potem je v enačbi –

$\prod =$ produkt

LASTNOSTI DETERMINANT

1.) Vrednost determinante se ne spremeni, če zamenjamo vlogi stolpcev in vrstic. Posledica: vse naslednje lastnosti veljajo za vrstice kot za stolpce.
2.) Če v determinanti zamenjamo dve vrstici (stolpca), se predznak determinante spremeni.
3.) Determinanta, ki ima dve vrstici (stolpca) enaki, ima vrednost 0.
4.) Če vse elemente v eni vrstici (stolpcu) pomnožimo z d, se vrednost determinante pomnoži z d.
5.) Če sta v determinanti dve vrstici proporcionalni, je vrednost determinante 0.
6.) Če so vsi elementi pod (nad) glavno diagonalo enaki 0, potem je vrednost determinante enaka produktu diagonalnih elementov.
7.) Če je v eni vrstici (ali stolpcu) na vsakem mestu element zapisan kot vsota, lahko determinanto zapišemo kot vsoto determinant. V eni determinanti sestavimo vrstico iz prvih členov, v drugi pa iz drugih členov vsot.
8.) Če eni vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice, vrednosti determinante ne spremenimo.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{14} & \\ & a_{22} & & & \\ a_{31} & & & & \\ & & a_{43} & & \\ & & & & a_{55} \end{vmatrix}$$

proporcionalnost:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{14} & \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} & a_{25}+b_{25} \\ a_{31} & & & & \\ & & a_{43} & & \\ & & & & a_{55} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} vrstica\ 1 \\ vrstica\ 2 \end{vmatrix} \overset{5.)}{=} \begin{vmatrix} vrstica\ 1 \\ vrstica\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} vrstica\ 1 \\ k \cdot vrstica\ 1 \end{vmatrix} \overset{7.)}{=} \begin{vmatrix} vrstica\ 1 \\ vrstica\ 2 + k \cdot vrstica\ 1 \end{vmatrix}$$

<u>Zgledi</u>:

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{*}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{**}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3-3\cdot 1 & 4-3\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

* od druge vrstice odštejemo prvo

** od druge vrstice odštejemo 3x prvo

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & -9 \\ 2 & 14 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & -9 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 4) = 16$$

(1, 2, 4 po diag.)

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{2.)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$ (2. pa 3. vrstica proporcionalni)

5. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Def.: Matrika dimenzije $m \times n$ je pravokotna tabelica m·n števil, razporejenih v m vrstic in n stolpcev.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A = [a_{ij}], 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

Def.: Sistem m linearnih enačb z n neznankami

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$
$$a_{21} \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

Za ta sistem linearnih enačb pravimo matriki

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ <u>matrika sistema</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$ <u>razširjena matrika sistema</u>

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$ <u>desna stran sistema</u>

Naloga: reši sistem

$2x_1 - 12x_2 + 8x_3 = 4$
$3x_1 - 16x_2 + 11x_3 = 8$
$x_1 + 3x_3 = 12$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -12 & 8 & 4 \\ 3 & -16 & 11 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 4 & 2 \\ 3 & -16 & 11 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$2x_3 = 4$
$x_3 = 2$

$2x_2 - x_3 = 2$
$2x_2 = 4$
$x_2 = 2$

$x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 2$
$x_1 = 6$

GAUSSOV POSTOPEK

V razširjeni matriki sistema bi radi dobili čimveč ničel pod diagonalo.
Pri tem lahko:

- enačbe ≡ vrstice menjamo med sabo
- enačbi ≡ vrstici lahko prištejemo poljuben večkratnik neke druge enačbe ≡ vrstice

[pri determinantah se pri zamenjavi vrstic predznak obrne!!!]

Def.: Rang matrike je število neničelnih vrstic, ki jih dobimo po končanem Gaussovem postopku.

Izrek: Sistem linearnih enačb je rešljiv natanko takrat, ko je rang matrike sistema enak rangu razširjene matrike sistema.

Zgled: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$
$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9$
$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 16$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & 16 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trditev: Rang matrike je enak največji velikosti kakšne njene podmatrike, katere determinanta je različna od 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang\ ni\ 3$$

Zgled:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Zgled: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 6$
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 8$
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 13$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 12x_5 = 15$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 9 & 13 \\ 1 & 2 & 5 & 10 & 12 & 15 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 7 & 9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

4 enačbe
5 neznank
3 rang (matrike isistema in razširjene matrike sistema)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 6 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 2x_4 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 6 - 2x_2 - 5x_5 \\ x_3 + 2x_4 &= 2 - 3x_5 \\ 2x_4 &= 5 - x_5 \end{aligned}$$

V tem sistemu si lahko vrednosti za x_2 in x_5 poljubno izberem.
Pri tej izbiri x_2 in x_5 so x_1, x_3 in x_4 enolično določeni.

<u>Izrek</u>: Denimo, da je sistem m linearnih enačb z n neznankami rešljiv, in je ranga r. Potem rešitve sestavljajo m-r parametrično družino. To pomeni, da lahko vrednosti "ustrezno izbranih" n-r neznank poljubno prepišemo, vrednosti preostalih r neznank pa so enolično določene (s temi predpisanimi vrednostmi).

V našem primeru: vrednosti dveh (m-r = 5-3) ustrezno izbranih neznank (x_2 in x_5) ahko poljubno predpišem. Vrednosti ostalih treh (x_1, x_3 in x_4) so enolično določene.

Neznankama x_2 in x_5 pravimo tudi parametra.

$1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 5\cdot x_5 = 6$
...
$1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 5\cdot x_3 + 10\cdot x_4 + 12\cdot x_5 = 15$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 2 & 5 & 10 & 12 & 15 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$2\cdot x_4 + x_5 = 5$
$x_4 + \frac{1}{2}\cdot x_5 = \frac{5}{2}$
$x_3 + 2\cdot x_5 = -3$
$x_1 + 2\cdot x_2 - 3\cdot x_5 = 5$

$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=0$
$x_5=1$	$x_5=1$	$x_5=3$
$x_1=8$	$x_1'=6$	$x_1^*=14$
$x_2=0$	$x_2'=1$	$x_2^*=0$
$x_3=-5$	$x_3'=-5$	$x_3^*=-9$
$x_4=2$	$x_4'=2$	$x_4^*=1$
$x_5=1$	$x_5'=1$	$x_5^*=3$

$y_i' = x_i - x_i'$	$y_i^* = x_i - x_i^*$
$y_1'=2$	$y_1^*=-6$
$y_2'=-1$	$y_2^*=0$
$y_3'=0$	$y_3^*=4$
$y_4'=0$	$y_4^*=1$
$y_5'=0$	$y_5^*=-2$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{y_i} = y_i' + y_i^* \\ \overline{\overline{y_i}} = 4\cdot y_i^* \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{tudi rešitev} \\ \text{D.N.: preveri} \end{array}$$

$1\cdot y_1' + 2\cdot y_2' + 3\cdot y_3' + 4\cdot y_4' + 5\cdot y_5' = 0$
$1\cdot y_1' + 2\cdot y_2' + 4\cdot y_3' + 6\cdot y_4' + 8\cdot y_5' = 0$
$1\cdot y_1' + 2\cdot y_2' + 4\cdot y_3' + 8\cdot y_4' + 9\cdot y_5' = 0$
$1\cdot y_1' + 2\cdot y_2' + 5\cdot y_3' + 10\cdot y_4' + 12\cdot y_5' = 0$

$1\cdot y_1^* + 2\cdot y_2^* + 3\cdot y_3^* + 4\cdot y_4^* + 5\cdot y_5^* = 0$
$1\cdot y_1^* + 2\cdot y_2^* + 4\cdot y_3^* + 6\cdot y_4^* + 8\cdot y_5^* = 0$
$1\cdot y_1^* + 2\cdot y_2^* + 4\cdot y_3^* + 8\cdot y_4^* + 9\cdot y_5^* = 0$
$1\cdot y_1^* + 2\cdot y_2^* + 5\cdot y_3^* + 10\cdot y_4^* + 12\cdot y_5^* = 0$

Def.: Sistemu linearnih enačb, ki ima za desno stran same ničle, pravimo homogen sistem linearnih enačb.

Trditev:
Homogen sistem ima vedno rešitev. Homogen sistem ima netrivialno rešitev natanko takrat, ko je njegov rang r strogo manjši od števila neznank m.

Komentar:
Trivialna rešitev homogenega sistema je rešitev samih ničel.

Dokaz:
Trivialna rešitev je vedno na voljo.
V homogenem sistemu je rang razširjene matrike isti kot rang matrike sistema.
Vemo, da lahko vrednosti "skrbno izbranih" m-r neznank poljubno izberemo, vse ostale vrednosti neznank pa so potem enolično določene. Lahko konstruiramo netrivialno rešitev.

Izrek: Naj bosta $(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ in $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ rešitvi istega homogenega sistema linearnih enačb S.
Potem sta za vsak $\lambda \in R$ tudi $(x_1'+x_1^*, x_2'+x_2^*, \ldots, x_m'+x_m^*)$ in $(\lambda x_1', \lambda x_2', \ldots, \lambda x_m')$ rešitvi sistema S.

Dokaz:
Denimo, da je prva enačba v sistemu enaka $a_1\cdot x_1+a_2\cdot x_2+\ldots+ a_m\cdot x_m=0$

Vstavimo v enačbo:
$a_1\cdot(x_1'+x_1^*)+a_2\cdot(x_2'+x_2^*)+\ldots+a_m\cdot(x_m'+x_m^*)=$
$a_1\cdot x_1'+a_2\cdot x_2'+\ldots+a_m\cdot x_m' + a_1\cdot x_1^*+a_2\cdot x_2^*+\ldots+a_m\cdot x_m^* =$
$0 \qquad 0 \qquad = 0$

Še enkrat:

$a_1(\lambda x_1')+a_2(\lambda x_2')+\ldots+a_m(\lambda x_m')+=$
$\lambda(a_1\cdot x_1')+\lambda(a_2\cdot x_2')+\ldots+\lambda(a_m\cdot x_m')=$
$\lambda(a_1\cdot x_1'+a_2\cdot x_2'+\ldots+a_m\cdot x_m')= \lambda\cdot 0=0$

Enakovreden račun lahko zapišemo še za vse ostale enačbe.
Zato je dokaz pri koncu.

Komentar:
Izberimo homogen sistem S.
"Vsota" dveh rešitev sistema je tudi rešitev sistema S.
"Produkt" rešitve s skalarjem (številom) je znova rešitev sistema S.