7. PERMUTACIJE

1.) OSNOVE, PRODUKT, TABELICE IN CIKLI

Def.: Naj bo A poljubna množica. Permutacija A je vsaka bijektivna preslikava $f:A \rightarrow A$.

Def.: Permutacija reda n je permutacija v množici {1, 2, ..., n}. Družina vseh permutacij reda n je simetrična grupa reda n, S_n.

Zgled:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ je permutacija reda } 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ je permutacija reda } 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ je permutacija reda } 5$$

Produkt permutacij:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi * \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

"množimo" z leve in ne z desne!

$$\psi * \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Množenje permutacij ni komutativno

Opazka: Za množenje permutacij uporabljamo isto operacijo, kot za množenje relacij. Množenje permutacij je asociativno.

Inverzna permutacija:

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi * \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$$

$$\pi^{-1} * \pi = \mathrm{id}$$

identiteta

$id * \pi = \pi$

$\pi * id = \pi$

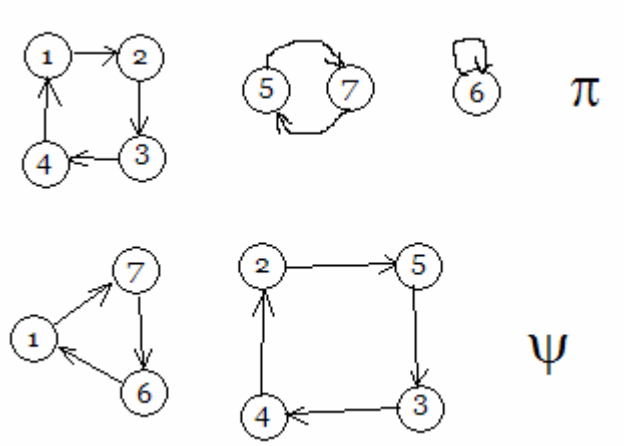
<u>Izrek</u>: $(S_n,*)$ je grupa. Njena moč $|S_n|$ je enaka n!.

<u>Dokaz</u>: Operacija je notranja, asociativna, id je nevtralni element, imamo tudi inverze.

n! je število spodnjih vrstic sestavljenih iz števil 1,...,n, kjer se vsako pojavi natanko enkrat.

Vzemimo družino D vseh permutacij iz množice S_n, ki imajo v zadnjem stolpcu $\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}$.

- D je trdna množica za *
- id $\in$ D
- če je $\pi \in D$, potem je $\pi^{-1} \in D$
- $(D,*)$ je podgrupa v $(S_n,*)$
- D je na "naraven" način enak množici S_{n-1}
- $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq S_4 \leq S_5 \ldots \leq$ je podgrupa v



<u>Zapis permutacije s cikli (disjunktivnimi)</u>:

π = (1 2 3 4)(5 7)(6)
(4 1 2 3)(5 7)(6)
(5 7)(6)(2 3 4 1)
(5 7)(2 3 4 1)

ψ = (1 7 6)(2 5 3 4)

π*ψ = (1 2 3 4)(5 7)(6)*(1 7 6)(2 5 3 4) = (1 5 6)(2 4 7 3)
ψ*π = (1 7 6)(2 5 3 4)*(1 2 3 4)(5 7)(6) = (1 5 4 3)(2 7 6)

<u>Def</u>.: Število ciklov posameznih dolžin, ki nastopajo v zapisu permutacije z disjunktnimi cikli, je <u>ciklična struktura permutacije</u>.

<u>Zgled</u>: ciklična struktura π je 4+2+1
ciklična struktura ψ je 4+3

Def.: Cikel dolžine 1, 1-cikel je fiksna točka permutacije.
Cikel dolžine 2, 2-cikel, je transpozicija.

2.) POTENCIRANJE PERMUTACIJ

Kako izračunati π^2 (=$\pi*\pi$), π^3 (=$\pi*\pi*\pi$), π^4, π^5, π^6, ..., π^{100}, ...

$\pi^2 =$ (1 2 3 4)(5 7)(6)*(1 2 3 4)(5 7)(6) = (1 2 3 4)(1 2 3 4)*(5 7)*(5 7)*(6)(6) =
$(1\ 2\ 3\ 4)^2*(5\ 7)^2*(6)^2$
$\pi^3 =$ $(1\ 2\ 3\ 4)^3*(5\ 7)^3*(6)^3$

Če želimo izračunati potence permutacij, je dovolj poznati potence posameznih ciklov

$\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$
$\alpha^2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)*(1\ 2\ 3\ 4\ 5)=(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$
$\alpha^3 = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$
$\alpha^4 = (1\ 5\ 4\ 3\ 2) = (5\ 4\ 3\ 2\ 1)$
$\alpha^5 = (1)(2)(3)(4)(5) = id$
$\alpha^6 = \alpha^5*\alpha = \alpha$

$\beta = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$
$\beta^2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$
$\beta^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$
$\beta^4 = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$
$\beta^5 = (6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$
$\beta^6 = (1)(2)(3)(4)(5)(6) = id$
$\beta^7 = \beta$

$\alpha^{-1}*\alpha = id$
$\alpha^{4''}*\alpha = id$
$\alpha^{-1} = \alpha^4$
$\beta^{-1} = \beta^5$

Def.: Če je v zapisu permutacije π z disjunktnimi cikli samo en cikel, pravimo, da je π ciklična permutacija ali cikel.

Trditev: Naj bo π ciklična permutacija sestavljena iz enega samega cikla dolžine m. Potem je permutacija π^k sestavljena iz gcd(m,k) disjunktnih ciklov iste dolžine $\frac{m}{\gcd(m,k)}$.

Medklic: $m,n \in N$, $m,n>1$
gcd(m,n) je največji skupni delitelj števil m in n.

Pomembno: Cikel pri potenciranju razpade na nekaj ciklov iste dolžine.

Posledica: Naj bo π m-cikel.
Potem je
1) $\pi^m = id$
2) $\pi^{-1} = \pi^{m-1}$
3) m je najmanjše pozitivno naravno število s tema 1) in 2) lastnostima

Izrek: Naj bo $\pi = \alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_k$, kjer so α_i, $i=1,\ldots,k$, ravno disjunktni cikli v zapisu π. Potem je $\pi^m = \alpha_1^m * \alpha_2^m * \ldots * \alpha_k^m$

Oznaka: Z n mod k označimo ostanek r pri deljenju števila n s številom k. To pomeni: $0 \le r < k$ in k deli n-r.

Trditev: Naj bo π k-cikel. Potem je $\pi^n = \pi^{n \bmod k}$

Zgled:

$$\begin{aligned}
\alpha^{101} &= \alpha^1 = \alpha \\
&= \alpha^{5*20+1} \\
&= \alpha^{5*20} * \alpha = \\
&= (\alpha^5)^{20} * \alpha = id * \alpha = \alpha
\end{aligned}$$

$+ \Rightarrow *$

$$\begin{aligned}
\beta^{101} &= \beta^5 \text{ ker} \\
\beta^{101} &= \beta^{96+5} = \\
&= \beta^{6*16+5} = \\
&= (\beta^6)^{16} * \beta^5 = \\
&= (id)^{16} * \beta^5 = \beta^5
\end{aligned}$$

3.) ZAPIS PERMUTACIJE S TRANSPOZICIJAMI

$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)$

$||$

$(2\ 3\ 4\ 5\ 1) = (2\ 3)(2\ 4)(2\ 5)(2\ 1)$

Trditev: Vsako permutacijo $\pi \in S_n$ $(n \ge 2)$ lahko zapišemo kot produkt transpozicij.

Dokaz:

a) $id = (12)(12) = (12)(12)(12)(12)$
b) π je ciklična permutacija
c) če π produkt disjunktnih ciklov, potem lahko vsakega od teh ciklov posebej pišemo kot produkt transpozicij

Izrek: (o parnosti permutacij)
Denimo, da lahko permutacijo π zapišemo kot produkt n transpozicij pa tudi kot produkt m transpozicij. Potem sta m in n iste parnosti – ali oba liha ali oba soda.

Def.: Permutacija π je soda, če jo lahko pišemo kot produkt sodo mnogo transpozicij in je liha, če jo lahko pišemo kot produkt liho mnogo transpozicij.

Def.: Naj bo $\pi \in S_n$. Števili x in y $(x<y)$ sta v inverziji v π, če je v tabelici π y pred x-om v spodnji vrstici.

Zgled:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1 in 2 sta v inverziji v π
3 in 7 nista v inverziji v π
1 in 2, 1 in 3, 1 in 4, 5 in 6, 5 in 7, 6 in 7. π ima 6 inverzij.

$\pi = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 7)(6) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(5\ 7)$
π zapišemo s 4 transpozicijami. π je soda permutacija.

<u>Dejstvo</u>: Identiteta je edina permutacija brez inverzij.

<u>Dokaz</u>: (izreka o parnosti)
Pokazali bomo, da je parnost permutacije π isto kot parnost števila inverzij v π.

Velja vsaj za identiteto
- soda permutacija
- sodo mnogo inverzij

Dovolj je pokazati, da množenja z 1 transpozicijo spremeni parnost števila inverzij.

$\pi \in S_{100}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 100 \\ \text{LEVO } 21 \text{ SREDNJE } 53 \text{ DESNO} \end{pmatrix}$$

$$\pi * (21\ 53) = \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 100 \\ \text{LEVO } 53 \text{ SREDNJE } 21 \text{ DESNO} \end{pmatrix}$$

Katere so tiste inverzije, ki so v π in niso v π*(21 53) ali obratno?

1) inverzijo med x in y (kjer $\{x,y\} \cap \{21,53\} = \emptyset$) so iste v π in π*(21 53)
2) številke LEVO ne vplivajo na število inverzij z 21 in 53
3) številke DESNO tudi ne
4) SREDNJE številke so
   a. majhne < 21
   b. velike > 53
   c. vmesne < 53 in > 21

   a. majhne številke v SREDI ne vplivajo na število inverzov
   b. velike številke v SREDI ravno tako ne
   c. vsaka vmesna številka na SREDI je v π v 0 inverzijah z 21, 53 v π*(21 53) pa v 2 inverzijah z 21, 53. Parnost števila inverzij se ne spremeni.
5) 21 in 53 <u>nista</u> v inverziji v π in <u>sta</u> v inverziji v π*(21 53)

1) – 5) parnost števila inverzij se spremeni.