Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

18. oktober 2006

Sklepanje v izjavnem računu

Predpostavki:	1.	*Če dežuje je oblačno.*
	2.	*Dežuje.*
Zaključek:	3.	*Oblačno je.*

Ali je sklep pravilen?

Še en zgled

Predpostavke:	1.	*Ta žival ima krila ali pa ni ptič.*
	2.	*Če je ta žival ptič, potem leže jajca.*
	3.	*Ta žival nima kril.*
Zaključek:	4.	*Torej ta žival ne leže jajc.*

Ali je ta sklep pravilen?

Tretji zgled

Predpostavke:	1.	*Io je Jupitrov satelit.*
	2.	*Titan je Saturnov satelit.*
Zaključek:	3.	*Zemlja je tretji planet od Sonca.*

Ali je ta sklep pravilen?

Formalizacija

dežuje	...	d
oblačno je	...	o

1.	$d \Rightarrow o$
2.	d
3.	o

Formalizacija, znova

ta žival ima krila	...	k
ta žival je ptič	...	p
ta žival leže jajca	...	j

1.	$k \vee \neg p$
2.	$p \Rightarrow j$
3.	$\neg k$
4.	$\neg j$

Pravilen sklep

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je *pravilen sklep* s *predpostavkami* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in *zaključkom* B, če je zaključek B resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke.

Pišemo: $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$

in beremo:

Iz predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ logično sledi zaključek B.

Četrti zgled

Predpostavke:	1.	*Šel bom na tekmo, zvečer pa bom naredil domačo nalogo.*
	2.	*Če grem na tekmo in nato še v kino, zvečer ne bom mogel narediti domače naloge.*
Zaključek:	3.	*Ne morem iti v kino.*

Ta sklep je pravilen. Zakaj?

Formalizacija

grem na tekmo	...	t
grem v kino	...	k
naredim domačo nalogo	...	d

$$\begin{array}{ll} 1. & t \wedge d \\ 2. & t \wedge k \Rightarrow \neg d \\ \hline 3. & \neg k \end{array}$$

Pravilen sklep

Izrek

$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ *natanko tedaj, ko*
$\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$

Pravilen sklep

Izrek

- *Če je* $B \sim C$*, potem* $A \models B$ *natanko tedaj, ko* $A \models C$*.*
- *Če z* 1 *označimo tavtologijo, potem* $A \models 1$*.*
- *Velja* $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A_k$ *(za* $k \in \{1, \ldots, n\}$*)*
- *Če z* 1 *označimo tavtologijo, potem* $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ *natanko tedaj, ko* $A_1, A_2, \ldots, A_n, 1 \models B$

Pravila sklepanja

$A, A \Rightarrow B \ \models\ B$	*modus ponens* (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \ \models\ \neg A$	*modus tollens* (MT)
$A \vee B, \neg B \ \models\ A$	*disjunktivni silogizem* (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \ \models\ A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem* (HS)
$A, B \ \models\ A \wedge B$	*združitev* (Zd)
$A \wedge B \ \models\ A$	*poenostavitev* (Po)
$A \ \models\ A \vee B$	*pridružitev* (Pr)

Pravilom sklepanja pravimo tudi *osnovni pravilni sklepi*.

Pravilnost sklepa

Pravilnost sklepa $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov $C_1, C_2, \ldots, C_m$, kjer je $C_m = B$ in za $i = 1, 2, \ldots, m$ velja:

(a) C_i je ena od predpostavk ali

(b) C_i je tavtologija ali

(c) C_i je enakovreden enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali

(d) C_i logično sledi iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Zgled

Ali iz predpostavk $p \Rightarrow q, p \vee r, q \Rightarrow s, r \Rightarrow t, \neg s$ sledi t?

1.	$p \Rightarrow q$	predpostavka
2.	$p \vee r$	predpostavka
3.	$q \Rightarrow s$	predpostavka
4.	$r \Rightarrow t$	predpostavka
5.	$\neg s$	predpostavka
6.	$p \Rightarrow s$	HS(1,3)
7.	$\neg p$	MT(6,5)
8.	r	DS(2,7)
9.	t	MP(4,8)

Nepravilen sklep

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Poiščemo *protiprimer*, tj. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

Nepravilen sklep

Z izbiro nabora $k \sim 0$, $p \sim 0$ in $j \sim 1$ pridelamo:

$$\begin{array}{rcl} k \vee \neg p & \sim & 1 \\ p \Rightarrow j & \sim & 1 \\ \neg p & \sim & 1 \qquad \text{in} \\ \neg j & \sim & 0 \end{array}$$

Protiprimer je žival, ki

- nima kril,
- ni ptič in
- leže jajca.