Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

15. november 2006

Izjavne formule

- *spremenljivke* $x, y, z, \ldots,$
- *konstante* $a, b, c, \ldots,$
- *predikati* $P, Q, R, \ldots,$
- izjavni vezniki $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots,$
- *kvantifikatorja* $\forall$ in $\exists$ ter
- oklepaja (in) .

Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi *termi*.

Atomi predikatnega računa so, na primer,

$$P(x), P(a), Q(x, y), Q(a, x), \ldots$$

Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate.

Izjavne formule

Izjavne formule so definirane induktivno:

1. Atomi so izjavne formule.
2. Če sta W in V izjavni formuli in je x spremenljivka, potem so tudi

   $$\neg(W), (W) \wedge (V), (W) \vee (V), (W) \Rightarrow (V), (W) \Leftrightarrow (V), \ldots$$

   $$\exists x\,(W) \quad \text{in} \quad \forall x\,(W)$$

   izjavne formule.

Doseg kvantifikatorjev

Doseg kvantifikatorja je *najmanjši možen*: najmanjša izjavna formula, ki jo preberemo desno od kvantifikatorja (skupaj z njegovo spremenljivko).

Kvantifikator *veže* svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.

Vezane in proste spremenljivke

V formuli imamo vezane in proste spremenljivke:

- vstop spremenljivke x je *vezan*, če se ta x nahaja v območju delovanja/dosega kvantifikatorja $\forall x$ ali $\exists x$,
- vstop spremenljivke, ki ni vezan, je *prost*.

Doseg, vezane in proste spremenljivke

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

$$\forall x\, P(x, y) \wedge Q(x, y)$$

$$\forall x\, P(w, y) \wedge Q(x, y)$$

$$\forall x\, (P(x, y) \wedge Q(z, y))$$

Doseg, vezane in proste spremenljivke

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

$$\forall x \neg \exists x \forall z\, P(x, y, z)$$

$$\exists x\, \neg P(x, y) \Rightarrow Q(x) \wedge R(y)$$

$$\exists x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x) \vee P(x) \wedge R(x) \vee S(y)$$

Interpretacija izjavne formule

Interpretacija $\mathcal{I}$ izjavne formule W je sestavljena iz neprazne množice $\mathcal{D}$, ki ji pravimo *področje pogovora* interpretacije.
Poleg tega

- vsakemu predikatu ustreza 0/1 logična funkcija v $\mathcal{D}$
- vsaki konstanti določimo vrednost v $\mathcal{D}$ (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante)
- vsaki prosti spremenljivki v W določimo vrednost v $\mathcal{D}$, pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo *isto* vrednost iz $\mathcal{D}$.

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo W formula. Z $W(x/a)$ označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli W vse proste vstope spremenljivke x nadomestimo z a.

W	$P(x) \vee \exists x\, Q(x,y) \wedge R(b,x)$
$W(x/a)$	$P(a) \vee \exists x\, Q(x,y) \wedge R(b,a)$

Pomen kvantifikatorjev

Formula $\forall x\, W$ je *resnična* v interpretaciji $\mathcal{I}$, če je za vsak element področja pogovora $d \in \mathcal{D}$ resnična formula $W(x/d)$. Sicer je $\forall x\, W$ neresnična.

Formula $\exists x\, W$ je *resnična* v interpretaciji $\mathcal{I}$, če v področju pogovora obstaja $d \in \mathcal{D}$, za katerega je formula $W(x/d)$ resnična. Sicer je $\exists x\, W$ neresnična.

Preimenovanje spremenljivk

Želja: če je W formula, potem imen prostih spremenljivk ne smemo spreminjati, če zelimo pridelati enakovredno formulo. Vezane spremenljivke lahko *preimenujemo* tako, da *ista* spremenljivka (tj. spremenljivka z istim imenom)

- ne nastopa pri več kvantifikatorjih
- ni hkrati vezana in prosta.

Preimenovanje spremenljivk

$$\forall x \exists y\, (P(x,y) \Rightarrow \exists x\, Q(x,y) \vee \forall y\, R(x,y)) \vee S(y)$$

Enakovredne izjavne formule

Izjavni formuli W in V sta *enakovredni*, če imata isto logično vrednost v vseh možnih interpretacijah.

V tem primeru pišemo $W \sim V$.

Enakovredne izjavne formule

Izjavna formula W je *splošno veljavna*, če je resnična v vsaki interpretaciji.

Izjavna formula V je *neizpolnljiva*, če je neresnična v vsaki interpretaciji.

Zakoni predikatnega računa

So nekateri pomembni pari enakovrednih izjavnih formul:

$$\neg\forall x\, W \sim \exists x\, \neg W$$
$$\neg\exists x\, W \sim \forall x\, \neg W$$

$$\forall x \forall y\, W \sim \forall y \forall x\, W$$
$$\exists x \exists y\, W \sim \exists y \exists x\, W$$

$$\forall x\, (W \wedge V) \sim \forall x\, W \wedge \forall x\, V$$
$$\exists x\, (W \vee V) \sim \exists x\, W \vee \exists x\, V$$

Zgledi

$P(x)$ ... *x je plešast.*
$N(x)$ ... *x je nesmrten.*

$S(x)$ ... *x je sodo število.*
$L(x)$ ... *x je liho število.*

Zakoni predikatnega računa z omejitvami

Če se x ne pojavi (prosto) v formuli C, potem veljajo naslednje enakovredosti:

$$\forall x\,(C \vee W) \sim C \vee \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \vee W) \sim C \vee \exists x\, W$$

$$\forall x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \exists x\, W$$

Prenexna normalna oblika

Trditev

Vsako formulo lahko enakovredno zapišemo tako, da se kvantifikatorji nahajajo samo na začetku.

Kako?

1. Preimenujemo spremenljivke.
2. Znebimo se $\Rightarrow$ in $\Leftrightarrow$, raje imamo $\neg$, $\wedge$ in $\vee$.
3. Izvlečemo kvantifikatorje na začetek z uporabo zakonov predikatnega računa.

Zgled

$$\forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \Rightarrow D(x) \wedge \exists x\, D(x)$$

Zgled

Zamenjava raznovrstnih kvantifikatorjev v splošnem ni možna.

$$P(x, y) \quad \ldots \quad x \text{ pozna } y\text{-ona.}$$

Včasih vseeno lahko:

$$\forall x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)) \;\sim\; \exists y \forall x\, (P(x) \wedge Q(y))$$

Omejeni kvantifikatorji

Vsako naravno število lahko pišemo kot produkt praštevil.

$$\forall x\,(N(x) \Rightarrow P(x)) \quad \overset{\text{def}}{\sim} \quad \forall x \in \mathbb{N}\,(P(x))$$

Obstaja sodo naravno število.

$$\exists x\,(N(x) \land S(x)) \quad \overset{\text{def}}{\sim} \quad \exists x \in \mathbb{N}\,(S(x))$$

Omejeni kvantifikatorji in negacija

Obnašanje je ravno takšno, kot pričakujemo.

$$\neg\forall x \in A\,(P(x)) \;\sim\; \exists x \in A\,\neg(P(x))$$

$$\neg\exists x \in A\,(P(x)) \;\sim\; \forall x \in A\,\neg(P(x))$$