Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

22. november 2006

Kaj je relacija

Množica R je *(dvomestna) relacija*, če je vsak njen element urejen par.

$$R \text{ je relacija.} \iff \forall x \in R \, \exists u, v \, : \, x = (u, v)$$

Množica R je *(dvomestna) relacija v množici* A, če je $R \subseteq A \times A$.

Zgledi

1. $A = \{e, f, g, h\} \qquad R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$
2. $A = \mathbb{N} \qquad R = \{(x, y) \; ; \; x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$
3. $\emptyset \subseteq A \times A$
4. $A \times A \subseteq A \times A$
5. $\mathrm{id}_A = \{(x, x) \; ; \; x \in A\}$

Namesto $(x, y) \in R$ pišemo xRy.

Domena in zaloga vrednosti

Naj bo R relacija v A.

$\mathcal{D}_R = \{x \; ; \; \exists y : xRy\}$ *domena* ali *definicijsko območje* relacije R.

$\mathcal{Z}_R = \{y \; ; \; \exists x : xRy\}$ *zaloga vrednosti* relacije R.

Lastnosti relacij

Naj bo R relacija v A. Pravimo, da je

1. R *refleksivna* $\iff \forall x \in A : xRx$
2. R *irefleksivna* $\iff \forall x \in A : \neg xRx$
3. R *simetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$
4. R *asimetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$
5. R *antisimetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
6. R *tranzitivna* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
7. R *intranzitivna* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow \neg xRz$
8. R *sovisna* $\iff \forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
9. R *strogo sovisna* $\iff \forall x, y \in A : xRy \vee yRx$
10. R *enolična* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$

Zgledi

1. Relacija id_A v A
2. Relacija $\leq$ v $\mathbb{N}$
3. Relacija $<$ v $\mathbb{N}$
4. Relacija $\subseteq$ v $\mathcal{P}A$
5. Relacija *"oče"* v množici ljudi (x oče y preberemo kot x *je oče* y*-ona.*)
6. Relacija *"je neposredni naslednik od"* v množici $\mathbb{N}$
7. Relacija *"deli"* v množici $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Lastnosti relacij

Če je A neprazna množica, potem R ne more biti hkrati refleksivna in irefleksivna. Le prazna relacija $\emptyset$ v prazni množici $\emptyset$ ima vse izmed lastnosti 1.,. . . ,10.

Naloga: Poišči relacijo v ustrezni množici, ki nima nobene izmed lastnosti 1.,. . . ,10.

Grafična predstavitev relacije

R naj bo relacija v *končni* množici A.

Elemente množice A narišemo kot *točke* v ravnini. Če velja aRb, narišemo usmerjeno puščico od a do b.

elementi A . . . točke v ravnini
aRb . . . usmerjena puščica od a do b.

Zgled: $A = \{e, f, g, h\}$ $\quad R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$

Predstavitev relacije s tabelo/matriko

Matrika relacije R v (končni množici) A je kvadratna 0/1 tabelica, $B(R)$. Elemente množice A uredimo

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Vrstice in stolpce matrike $B(R)$ *indeksiramo (označimo)* po vrsti v tem vrstnem redu.

$B(R)_{a_i,a_j}$, element v a_i-ti vrstici in a_j-tem stolpcu, je enak 1, če je $a_i R a_j$, v nasprotnem primeru je enak 0.

Operacije z relacijami

Relacije so posebne vrste množic. Vemo, kako so definirane operacije $\cup, \cap$ in $\setminus$.

Ponavadi se pogovarjamo o družini relacij na isti množici A. V takem primeru je *komplement* smiselno definirati kot

$$R^c := (A \times A) \setminus R = U_A \setminus R$$

Operacije z relacijami

Poleg navedenih operacij definiramo tudi:

- *inverzno relacijo* relacije R, označimo jo z R^{-1}:

$$R^{-1} := \{(y, x) \,;\, (x, y) \in R\}$$

- *produkt relacij* R in S, označimo ga z $R * S$:

$$R * S := \{(x, z) \,;\, \exists y \,(xRy \wedge ySz)\}$$

Operacije z relacijami

Zgled: sorodstvene relacije med ljudmi
Relacija *oče* v množici ljudi je definirana kot

x oče $y \Leftrightarrow$ *x je oče y-ona.*.

Naloga: Izrazi relacije *roditelj*, *zet*, *snaha*, *ded*, *vnuk*, *tašča*, *svak* z "bolj elementarnimi" sorodstvenimi relacijami *oče*, *mati*, *sin*, *hči*, *mož*, *žena*, ...

Lastnosti operacij z relacijami

Naj bodo R, S, T relacije na A.

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$
3. $(R * S) * T = R * (S * T) =: R * S * T$
4. $R * (S \cup T) = R * S \cup R * T$
5. $(R \cup S) * T = R * T \cup S * T$
6. $R * \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A * R = R$
7. $R \subseteq S \implies R * T \subseteq S * T$ in $T * R \subseteq T * S$

Potence relacij

Zaradi asociativnosti množenja relacij lahko definiramo potence relacij. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

$$\begin{array}{lcl} R^0 & := & \mathrm{id}_A \\ R^{n+1} & := & R^n * R, \text{ če je } n \geq 0. \end{array}$$

Velja $R^1 = R$, $R^2 = R * R$, ter za $m, n \geq 0$ tudi $R^m * R^n = R^{m+n}$.

Potence relacij

Definiramo lahko tudi potence z negativnimi eksponenti, če je $n > 0$, potem

$$R^{-n} := (R^{-1})^n$$

Toda če sta m in n celi števili različnih predznakov, potem $R^n * R^m$ ni nujno enamo R^{m+n}.

Potence relacij

Zgled: sorodstvene relacije med ljudmi

Naloga: Definiraj relacije *prednik*, *potomec*, *sorodnik*.

Potence relacij

Naj bo R relacija v A.

Relacijo R^+ imenujemo *tranzitivna ovojnica* relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

Relacijo R^* imenujemo *tranzitivno-refleksivna ovojnica* relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

Vprašanje: Kako s pomočjo grafa relacije R opišemo grafa relacij R^+ in R^*?

Algebraična karakterizacija lastnosti relacij

Naj bo R relacija v A. Relacija R je

1. *refleksivna* $\iff \mathrm{id}_A \subseteq R$
2. *irefleksivna* $\iff R \cap \mathrm{id}_A = \emptyset$
3. *simetrična* $\iff R^{-1} = R$
4. *asimetrična* $\iff R^{-1} \cap R = \emptyset$
5. *antisimetrična* $\iff R^{-1} \cap R \subseteq \mathrm{id}_A$
6. *tranzitivna* $\iff R^2 \subseteq R$
7. *intranzitivna* $\iff R \cap R^2 = \emptyset$
8. *sovisna* $\iff \mathrm{id}_A \cup R \cup R^{-1} = U_A$
9. *strogo sovisna* $\iff R \cup R^{-1} = U_A$
10. *enolična* $\iff R^{-1} * R \subseteq \mathrm{id}_A$