24.11.2004

RELACIJE

Namesto $(x,y) \in R$ uporabljamo xRy

Def.: Naj bo $R \subseteq AxA$

$D_R = \{ x;\ \exists y \in A: xRy \}$ je domena ali definicijsko obmocje relacije R
$Z_R = \{ y;\ \exists x \in A: xRy \}$ je zaloga vrednosti relacije R

Za zgled od zadnjič:
$D_R = \{ a, b, c \}$
$Z_R = \{ b, c, č \}$

LASTNOSTI RELACIJ

Def.:
(1) R je refleksivna $\Leftrightarrow \forall x \in A: xRx$
(2) R je irefleksivna $\Leftrightarrow \forall x \in A: \neg xRx$
(3) R je simetrična $\Leftrightarrow \forall x,y \in A: xRy \Rightarrow yRx$
(4) R je asimetrična $\Leftrightarrow \forall x,y \in A: xRy \Rightarrow \neg yRx$
(5) R je antisimetrična $\Leftrightarrow \forall x,y \in A: xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$
(6) R je tranzitivna $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in A: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
(7) R je intranzitivna $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in A: xRy \wedge yRz \Rightarrow \neg xRz$
(8) R je sovisna $\Leftrightarrow \forall x,y \in A: x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
(9) R je strogo sovisna $\Leftrightarrow \forall x,y \in A: xRy \vee yRx$
(10) R je enolična $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in A: xRz \wedge xRy \Rightarrow z=y$

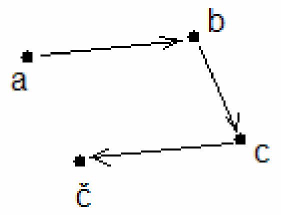
Zgledi:
- relacija id_A v A (=)
  - refleksivna
  - simetrična
  - antisimetrična
  - tranzitivna
  - enolična
- relacija $\leq$ v N
  - refleksivna
  - antisimetrična
  - tranzitivna
  - strogo sovisna (tudi sovisna)
- relacija $<$ v N
  - irefleksivna
  - asimetrična (tudi antisimetrična)
  - tranzitivna
  - sovisna
- relacija $\subseteq$ v PA
  - refleksivna
  - antisimetrična

- tranzitivna

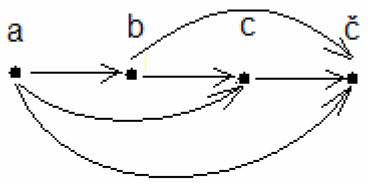
- relacija oče: x oče y … x je oče od y-ona
  - irefleksivna
  - asimetrična (tudi antisimetrična)
  - intranzitivna
- relacija biti sin
  - irefleksivna
  - asimetrična
  - intranzitivna
  - enolična na množici moških

Predstavitev relacije z grafom
$R \subseteq AxA$, A naj bo končna množica
- elemente množice A narišemo kot točke v ravnini
- če velja aRb, potem narišemo puščico od a do b

Zgled:
R = { (a,b),(b,c),(c,č) }
A = { a, b, c, č }
"leži neposredno pred":

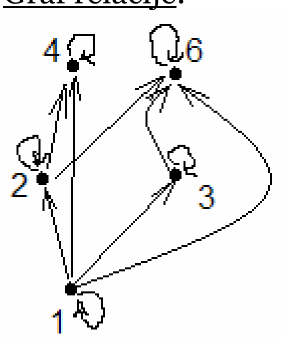


"leži pred v abecedi kot":



Zgled:
a|b … a deli b
množica { 1, 2, 3, 4, 6 }

Graf relacije:



KAKO SE LASTNOST VIDI IZ GRAFA

(1) R je refleksivna ... pri vsaki točki je zanka
(2) R je irefleksivna ... pri nobeni točki ni zanke
(3) R je simetrična ... vse puščice so dvosmerne
(4) R je asimetrična ... brez zank in vse puščice so enosmerne
(5) R je antisimetrična ... vse puščice so enosmern (zanke so lahko prisotne)
(6) R je tranzitivna ... če imam dve zaporedni puščici, potem imam »zveznico«
(7) R je intranzitivna ... če imam dve zaporedni puščici, potem »zveznice« ni
(8) R je sovisna ... med vsakima dvema točkama (različnima) je puščica
(9) R je strogo sovisna ... med vsakima dvema točkama je puščica, imamo tudi vse zanke
(10) R je enolična ... iz vsake točke gre ven kvečjemu ena puščica (ena ali nobena)

PREDSTAVITEV RELACIJE S TABELO / Z MATRIKO

Def.: $R \subseteq AxA$, A končna.
Izberemo vrstni red elementov v množici $A = \{ a_1, a_2, a_3, ..., a_n \}$

B(R) = [] Stolpce in vrstice indeksiramo (označimo) po vrsti v tem vrstnem redu.
Matrika relacije B(R) je tabelica 0/1 z n vrsticami in n stolpci, kjer je b_{ij} = { 1: a_iRa_j, 0: a_iRa_j

Zgled:
A = { a, b, c, č }
R = { (a,b),(b,c),(c,č) }

B(R) =

0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

A= {1,2,3,4,6}
Relacija deli

B(R) =

1	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

(navpicno gor->dol 1 2 3 4 6 in levo->desno 1 2 3 4 6)

DN: Zapiši matriki relacij v drugem vrstnem redu elementov 1 4 3 2 6

KAKO SE LASTNOST VIDI IZ MATRIKE

(1) R je refleksivna ... na diagonali (levo gor – desno dol) so same enice
(2) R je irefleksivna ... na diagonali so same ničle
(3) R je simetrična ... zrcaljenje preko diagonale ne spremeni matrike

(4) R je asimetrična … ničle po diagonali, enice izven diagonale ne ležijo na mestih, ki so zrcalna na diagonalo
(5) R je antisimetrična … enice izven diagonale ne ležijo na mestih, ki so zrcalna na diagonalo
(6) R je tranzitivna …
(7) R je intranzitivna …
(8) R je sovisna … na vsakem paru zrcalnih (glede na diagonalo) polj izven diagonale je vsaj ena enica
(9) R je strogo sovisna … poleg zgornjega pogoja morajo biti na diagonali enice
(10) R je enolična … v vsaki vrstici kvečjemu eno enico (eno ali nobeno)

OPERACIJE Z RELACIJAMI

Def.: R, S $\subseteq$ AxA
Tudi: $R \cup S$, $R \setminus S$, $R \cap S$ so relacije v A.
$R^C = U_A \setminus R$ [U_A = AxA]

Def.: Inverzna relacija R^{-1} je definirana z
$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$
$R^{-1} = \{ (y,x); (x,y) \in R \}$

Komentar:
Graf inverzne relacije R^{-1} dobimo iz grafa relacije R tako, da obrnemo usmeritve puščic.
Matriko inverzne relacije $B(R^{-1})$ dobimo iz B(R) tako, da jo prezrcalimo preko diagonale.

Def.: R, S $\subseteq$ AxA
Produkt ali KOMPOZITUM relacij R in S je relacija $R*S \subseteq AxA$, za katero velja:
$xR*Sy \Leftrightarrow \exists z \in A: xRz \wedge zSy$

LASTNOSTI OPERACIJ

Trditev: R, S, T $\subseteq$ AxA
(1) $(R^{-1})^{-1} = R$
(2) $(R*S)^{-1} = S^{-1}*R^{-1}$
(3) $(R \cup S)*T = R*T \cup S*T$ [* veže močneje kot $\cup$, $\cap$, \]
(4) $R*(S \cup T) = R*S \cup R*T$
(5) $(R*S)*T = R*(S*T)$
(6) $R*id_A = id_A*R = R$
(7) $R \subseteq S \Rightarrow R*T \subseteq S*T \wedge T*R \subseteq T*S$

Dokaz (2):
$x(R*S)^{-1}y \Leftrightarrow yR*Sx$
$\Leftrightarrow \exists z \in A: yRz \wedge zSx$
$\Leftrightarrow \exists z \in A: xS^{-1}y \wedge zR^{-1}y$
$\Leftrightarrow xS^{-1}*R^{-1}y$
Ker sta x in y poljubna, sledi $(R*S)^{-1} = S^{-1}*R^{-1}$

<u>Komentar</u>:
$R*S \neq S*R$ (v splošnem)
Formuli (3) in (4) nista resnični, če unijo $\cup$ nadomestimo s presekom $\cap$.

<u>Zgled</u>:
množica { ljudje }, x"oče"y ... x je oče od y-ona
mati $\cup$ oče = starš
starš \ oče = mati
zet = mož * hči (x zet y ... $\exists$z: x mož z $\wedge$ z hči y)
snaha = žena * sin
ded = oče * oče $\cup$ oče * mati = oče * (oče $\cup$ mati) = oče * starš
vnuk = sin * sin $\cup$ sin * hči = sin * otrok
tašča = mati * žena $\cup$ mati * mož = mati * (žena $\cup$ mož) = mati * zakonec
svak = mož * sestra $\cup$ brat * žena $\cup$ brat * mož = mož * sestra $\cup$ brat * zakonec
brat = (sin * mati) $\cap$ (sin * oče) \ $id_{\{ljudje\}}$ (x brat y, x moški, x in y imata istega očeta in isto mamo. x je sin od očeta od y-ona in x je sin od mame od y-ona }
polbrat = (sin * mati) $\cup$ (sin * oče) \ brat \ $id_{\{ljudje\}}$