RELACIJE (NAPREJ)

ALGEBRAIČNA KARTERIZACIJA LASTNOSTI RELACIJ

$R \subseteq AxA$

1) R je refleksivna ... $id_A \subseteq R$
2) R je irefleksivna ... $id_A \cap R = \emptyset$
3) R je simetrična ... $R = R^{-1}$
4) R je asimetrična ... $R \cap R^{-1} = \emptyset$
5) R je antisimetrična ... $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$
6) R je tranzitivna ... $R^2 = R*R \subseteq R$
7) R je intranzitivna ... $R^2 \cap R = \emptyset$
8) R je sovisna ... $R \cup R^{-1} \cup id_A = AxA = U_A$
9) R je strogo sovisna ... $R \cup R^{-1} = U_A$
10) R je enolična ... $R^{-1}*R \subseteq id_A$

<u>Naloga</u>: Če je R tranzitivna in refleksivna, potem je $R^2 = R$.

Vemo: $id_A \subseteq R$; $R \cup id_A = R$ (refleksivnost)

$R^2 = R*R \subseteq R$ (tranzitivnost)

Dovolj je pokazati da $R \subseteq R^2$

$R^2 \cup R = R^2$

$R^2 = R*R = (R \cup id_A)*R = R*R \cup id_A*R = R^2 \cup R$

Torej $R=R^2$.

POTENCE RELACIJ

<u>Medklic</u>: $a^5 = ((a*a)*a)*(a*a) \neq (a*(a*a))*(a*a)$

<u>Def.</u>: $R \subseteq AxA$

$R^0 = id_A$

Če $n \geq 0$ potem $R^{n+1} = R*R^n$

<u>Velja</u>: $R^1 = R*R^0 = R*id_A = R$

$R^2 = R*R^1 = R*R$

<u>Medklic</u>: $a^5*a^3=a^8$

<u>Def.</u>: Če $n \geq 0$ potem $R^{-n} = (R^{-1})^n$

<u>Trditev</u>: Za $m,n \geq 0$ velja $R^m*R^n = R^{m+n}$

<u>Opazka</u>: $R^{-1}*R^1 \neq R^0 = id_A$

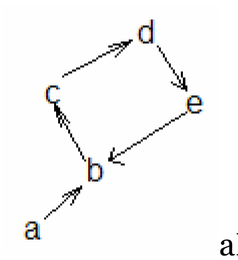
<u>Def.</u>: $R^+ = U(k=1 \rightarrow \text{neskončno})\ R^k$

$R^* = U(k=0 \rightarrow \text{neskončno})\ R^k$

<u>Komentar</u>:

aR^+b ... od a-ja do b-ja se lahko sprehodimo po puščicah v relaciji R. Uporabiti moramo vsaj eno puščico

aR^*b ... od a-ja do b-ja se lahko sprehodimo po puščicah v relaciji R, pri čemer smemo ostati tudi na mestu.



aR^*a, aR^+e, cR^+c, $\neg aR^+a$

<u>Zgled</u>:

otrok ∪ otrok * otrok ∪ otrok * otrok * otrok ∪ … =
= otrok ∪ otrok^2 ∪ otrok^3 ∪ … =
= U(k=1→neskončno) otrok^k = otrok^+ = potomec
= starš^+ = prednik

x sorodnik y ∃z … z prednik x ∧ z prednik y
∃z … x potomec z ∧ z prednik y

sorodnik = potomec*prednik

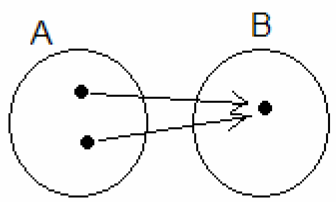
FUNKCIJE IN PRESLIKAVE

<u>Def</u>.: Enolično relacijo imenujemo <u>funkcija</u>.

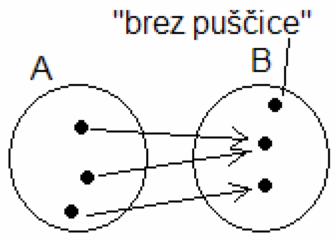
$(x,y) \in f$, xfy, $y=f(x)$, f: x|-> y
funkcija f x <u>preslika</u> v y
x je <u>argument</u> funkcije f,
y je <u>vrednost</u> funkcije f pri x
y je <u>slika</u> elementa x.

<u>Def</u>.: $f \subseteq A \times B$ je <u>preslikava</u> iz A v B, $f: A \to B$, če je:
- f je funkcija (f je enolična)
- $D_f = A$

<u>Def</u>.: $f: A \to B$. Pravimo, da je
- f <u>injektivna</u> ⇔ $\forall x,y \in A: (f(x)=f(y) \Rightarrow x=y)$
- f <u>surjektivna</u> ⇔ $Z_f = B$
- f <u>bijektivna</u> ⇔ f injektivna in surjektivna



ni injektivna



ni surjektivna

<u>Vprašanje</u>: Kdaj je f^{-1} funkcija, kdaj celo preslikava?

Trditev: Naj bo $f:A \to B$
- f^{-1} je funkcija $\Leftrightarrow$ f je injektivna
- f^{-1} je preslikava iz B v A ($f^{-1}:B \to A$) $\Leftrightarrow$ f bijektivna

Dokaz: f ni injektivna $\Leftrightarrow \exists x,y \in A:(x \neq y \wedge f(x)=f(y)) := Z$
$\Leftrightarrow \exists x,y \in A:(x \neq y \wedge xfz \wedge yfz)$
$\Leftrightarrow \exists x,y \in A:(xf^{-1}x \wedge zf^{-1}y \wedge x \neq y)$
$\Leftrightarrow f^{-1}$ ni enolična $\Leftrightarrow f^{-1}$ ni funkcija
dovolj pokazati: (predpostavimo, da f^{-1} funkcija = f injektivna)
f surjektivna $\Leftrightarrow Z_f = B \Leftrightarrow D_{f^{-1}} = B \Leftrightarrow f^{-1}:B \to A$

Def.: $f:A \to B$, $A_1 \subseteq A$

Zožitev preslikave f na množico A_1, $f|_{A_1}$, je preslikava
$f|_{A_1}:A_1 \to B$ definirana s predpisom $f|_{A_1}(x)=f(x)$ za vse $x \in A_1$

Zgledi 1:
1) $id_A : A \to A$ identiteta na A, bijektivna preslikava
$id_A(x) = x$ identiteta na A, bijektivna preslikava
2) $p_i : A_1 x A_2 x \ldots x A_n \to A_i$ projekcija na i-to koordinato, surjektivna
$p_i((a_1,a_2,\ldots,a_n)) = a_i$ projekcija na i-to koordinato, surjektivna
3) $A_1 \subseteq A$ $i = id_A|_{A_1}$ vložitev množice A_1 v A, injektivna
$i:A_i \to A$
$i(x)=x$ $(x) \in A_1, x \in A$
4) $B \subseteq A$ $X_B:A \to \{0,1\}$ karakteristična funkcija množice B
$X_B(x)=\{1; x \in B, 0; x \notin B$

Zgledi 2: X = {0, 1, 00, 01, 10, 11, ... } neprazne bitne besede
N = {0, 1, 2, 3, 4, ... }
- $R_1 \subseteq XxN$ $\alpha R_1 n$ ... n število enic v nizu α
- $R_2 \subseteq XxN$ $\alpha R_2 n$ ... n je prvi bit niza α
- $R_3 \subseteq XxN$ $\alpha R_3 n$ ... n je mesto najbolj leve ničle v nizu α
- $R_4 \subseteq XxX$ $\alpha R_4 \beta$ ... β dobim tako, da nizu α na koncu prilepim 0 ali 1
- $R_5 \subseteq NxX$ $nR\alpha$ ... α je niz n zaporednih enic.

Katere izmed $R_1,\ldots,R_5$ so funkcije/preslikave?

- R_1: $X \to N$ je
- R_2: $X \to N$ je
- R_3: $D_{R3} \neq X$ izpadejo nizi samih enic; je funkcija, ni preslikava
- R_4: $00R_4 001$, $00R_4 000$; R_4 ni enolična
- R_5: $D_{R5} \neq N$, $0 \notin D_{R5}$

Def.: Naj bo $f:A \to B$ in $g:b \to C$
Kompozitum preslikav f in g, $g \circ f$ je preslikava $g \circ f:A \to C$

Definirana s predpisom $g \circ f(x) = g(f(x))$
[$g \circ f = f * g$] $xfy == y=f(x)$

Lastnost: $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ $\quad h:C\to D$

<u>Trditev</u>: Naj bo $f:A\to B$ in $g:B\to C$

- če sta f in g injektivno, potem je $g\circ f$ injektivna
- če sta f in g surjektivni, potem je $g\circ f$ surjektivna
- če je $g\circ f$ injektivna, potem je f injektivna
- če je $g\circ f$ surjektivna, potem je g surjektivna

<u>Dokaz (3)</u>: če $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ (to je definicija injektivnosti f)

Izberemo a_1 in a_2. Privzamemo, da je $f(a_1) = f(a_2)$

Računamo: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$

$\Leftrightarrow g\circ f(a_1) = g\circ f(a_2)$

ker $g\circ f$ injektivna $\Rightarrow a_1 = a_2$

Tudi f je injektivna

<u>Dokaz (4)</u>: $Z_g = C \leftarrow$ (to bi radi pokazali)

Vemo: $g\circ f$ je surjektivna. $Z_{g\circ f} = C$

Izberimo poljuben $c\in C$. Pokazati želimo, da $c\in Z_g$.

$\exists a\in A: c=g\circ f(a) = g(f(a))$

Poimenujemo f(a) z b; $b:=f(a)$

$g(b) = g(f(a)) = c$

$g:b\mapsto c$. Torej je $c\in Z_g$

<u>Trditev</u>: $f:A\to B$, $g:B\to A$.

Če je $f\circ g = id_B$ in

$g\circ f = id_A$, potem sta

f in g bijektivni in je $g=f^{-1}$

$f\circ g(x)=f(g(x))$

<u>Dokaz</u>: $id_B = f\circ g \Rightarrow$ f surjektivna, g injektivna }

$id_A = g\circ f \Rightarrow$ g surjektivna, f injektivna }

(ker id_A surjektivna + injektivna)

f in g sta bijektivni preslikavi

$g = id_A\circ g = (f^{-1}\circ f)\circ g = f^{-1}\circ(f\circ g)=f^{-1}\circ id_B=f^{-1}$

<u>Izrek</u>: (Dinchletov princip)

Če $f:A\to A$, A končna množica, potem so naslednje trditve enakovredne:

1) f je bijektivna
2) f je surjektivna
3) f je injektivna

<u>Komentar</u>: Izrek ne velja, če A neskončna. Primer:

$N\to N$

$x\mapsto x+1$ - je injektivna

- ni surjektivna

<u>Dokaz</u>: Dovolj je premisliti, da (2)⇔(3)
Na primeru: 10 avtomobilov, 10 garaž. Vsi avti v garažah.
Vse garaže polne ⇔ V nobeni garaži ni dveh avtomobilov.