VEKTORSKI PROSTOR

Def.: Vektorski prostor (ali linearni prostor) V nad obsegom O je neprazna množica, njegove elemente imenujemo vektorji.

Definirani sta dve operaciji:
- seštevanje vektorjev
- množenje vektorjev s skalarji (elementi obsega O)

Operaciji zadoščata naslednjim lastnostim:
- seštevanje vektorjev
  + : VxV→V
  $\vec{x}, \vec{y} \to \vec{x} + \vec{y}$
  (V,+,$\vec{0}$) je Abelova (komutativna) grupa.
  $\vec{0}$ je nevtralni element (vektor nič)
- množenje s skalarji
  · : OxV→V
  je distributivno glede na vsoto vektorjev $a(\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$
  je distributivno glede na vsoto skalarjev $(a + b)\vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$
  je "asociativno": $(a \cdot b)\vec{x} = a \cdot (b \cdot \vec{x})$
  in $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Komentar:
Obravnavali bomo samo vektorske prostore nad R. Rekli jim bomo tudi realni vektorski prostori.

Zgled: (za prvo rabo):
Rešitve izbranega homogenega sistema linearnih enačb S sestavljajo vektorski prostor

R^n kot vektorski prostor
Izberemo $n \in N$, $n \geq 2$
Vektor iz R^n je urejena n-terica realnih števil, ki jo običajno pišemo v obliki stolpca

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in R^n$$

Realna števila $a_1, a_2, \dots, a_n$ imenujemo komponente ali koordinate vektorja $\vec{a}$.

Računanje z vektorji

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Vsota vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor, ki ima za koordinate vsote istoležnih koordinat vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Produkt vektorja $\vec{a}$ s skalarjem t je vektor, katerega koordinate so produkti koordinat vektorja $\vec{a}$ s skalarjem t.

$$t \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \\ \dots \\ t \cdot a_n \end{bmatrix}$$

LASTNOSTI OPERACIJ

a) seštevanje vektorjev v R^n je komutativno (ker je seštevanje v eni koordinati komutativno)

b) seštevanje vektorjev v R^n je asociativno

c) vektor $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ je nevtralni element za seštevanje vektorjev

d) vektor $-\vec{a} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$ je nasprotni vektor k $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$

a) → d): R^n je Abelova grupa za seštevanje vektorjev

$$t\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = t\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \dots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t(a_1+b_1) \\ t(a_2+b_2) \\ \dots \\ t(a_n+b_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cdot a_1 + t \cdot b_1 \\ t \cdot a_2 + t \cdot b_2 \\ \dots \\ t \cdot a_n + t \cdot b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \\ \dots \\ t \cdot a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \cdot b_1 \\ t \cdot b_2 \\ \dots \\ t \cdot b_n \end{bmatrix} = t \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$$

e) množenje vektorjev s skalarjem je distributivno glede na vsoto vektorjev
množenje vektorjev s skalarjem je distributivno glede na vsoto skalarjev

f)

$$(s \cdot t)\vec{a} = (s \cdot t)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s \cdot t)\cdot(a_1) \\ (s \cdot t)\cdot(a_2) \\ \dots \\ (s \cdot t)\cdot(a_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot (t \cdot a_1) \\ s \cdot (t \cdot a_2) \\ \dots \\ s \cdot (t \cdot a_n) \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \\ \dots \\ t \cdot a_n \end{bmatrix} =$$

$$s \cdot (t \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}) = s \cdot (t \cdot \vec{a})$$

Množenje vektorjev s skalarji je "asociativno" in $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (brez dokaza)

a) → f): Množica R^n je za tako definirano seštevanje in množenje s skalarji vektorski prostor nad R.

Def.: Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta kolinearna, če obstaja tak skalar t, da je $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$ ali $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$.

Komentar:

Vektor $\vec{0}$ je kolinearen z vsakim vektorjem $\vec{a} \in R^n$

$\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$

Def.: Naj bodo $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorji iz R^n in $t_1, t_2, ..., t_m$ skalarji iz R, potem pravimo vektorju

$t_1 \cdot \vec{a}_1 + t_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + t_m \cdot \vec{a}_m$

linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$.

Trditev:

Naj bo $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m\}$ množica vektorjev iz R^n.

Družina vseh linearnih kombinacij vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ je vektorski prostor.

Zgled:

- R^4 je družina vseh linearnih kombinacij vektorjev $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, in \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$
- Vse linearne kombinacije vektorjev

  $\begin{bmatrix}2\\1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\2\\0\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-10\\-5\\0\\1\end{bmatrix}, in \begin{bmatrix}6\\3\\0\\12\end{bmatrix}$ **ne** sestavljajo cele množice R^4.

  $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

  se ne da dobiti kot linearna kombinacija slednjih štirih vektorjev (nima ničle na 3. koordinati)

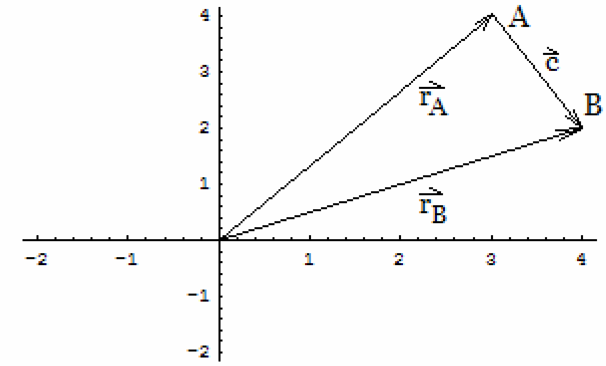
  $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$

  ravno tako ne. Prva koordinata ni 2x tolikšna kot druga.

  D.N.: dokaži, da linearne kombinacije izbranih vektorjev sestavljajo vektorski prostor.

VEKTORJI V RAVNINI – R²

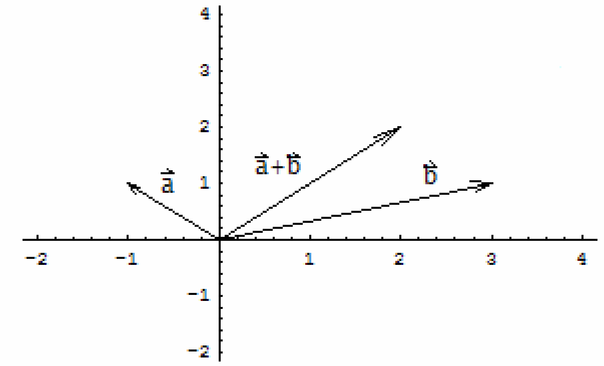
kartezični koordinatni sistem



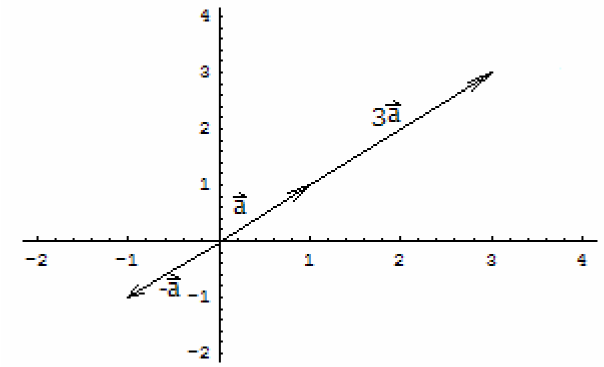
$$\vec{r}_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad c = -\vec{r}_A + \vec{r}_B = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_B + (-1)\vec{r}_A$$

$$\vec{r}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Seštevanje vektorjev (paralelogramsko pravilo)



Množenje vektorja s skalarjem



<u>Izrek</u>: Vsak vektor v ravnini lahko zapišemo kot linearno kombinacijo dveh izbranih nekolinearnih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

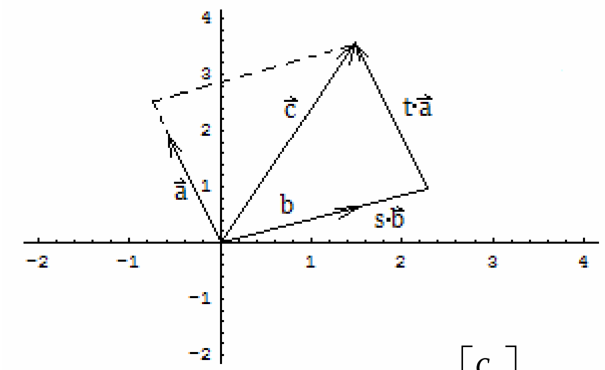
<u>Dokaz</u>:

$\vec{a}$ in $\vec{b}$ nista enaka $\vec{0}$

$\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $\varphi \neq 0°, 180°$

Izberemo poljuben vektor $\vec{c}$ pri skrbno izbranih t in s

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}\qquad \vec{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\qquad \vec{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$



Radi bi videli, da obstajata t, s za katera je $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=t\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\begin{bmatrix}t\cdot a_1+s\cdot b_1\\t\cdot a_2+s\cdot b_2\end{bmatrix}$

t in s sta rešitev sistema linearnih enačb:
$a_1 \cdot t + b_1 \cdot s = c_1$
$a_2 \cdot t + b_2 \cdot s = c_2$

Sistem rešujemo z Gaussovo eliminacijo.

$\left[\begin{array}{cc|c}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{array}\right]$ od 2. enačbe odštejemo $\frac{a_2}{a_1}$ krat prvo enačbo

1. $a_1 \neq 0$ (če je, zamenjamo vlogi a_1 in a_2, ker a_1 in a_2 nista oba enaka 0!)

   $\left[\begin{array}{cc|c}a_1 & b_1 & c_1\\0 & b_2-\frac{a_2}{a_1}b_1 & c_2-\frac{a_2}{a_1}c_1\end{array}\right]$ Ali je sistem rešljiv.

   če je $b_2-\frac{a_2}{a_1}\cdot b_1 \neq 0$, potem je rang obeh matrik sistema enak 2 in je zato sistem rešljiv.

   če $b_2-\frac{a_2}{a_1}\cdot b_1 = 0$, je $\left.\begin{array}{l}a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1=0\\a_1\cdot b_2=a_2\cdot b_1\end{array}\right\}\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2}{a_1}\otimes$

   $\otimes$ pomeni, da sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna, kar je v nasprotju s predpostavko.