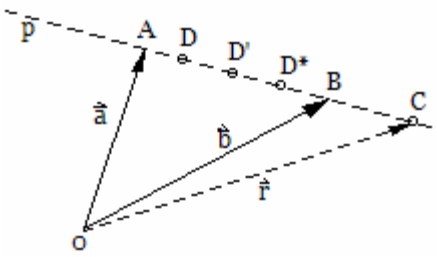
Zgled:

- Kako opisati premico skozi točki A in B?



$\vec{r} = \vec{a} + t\cdot \overline{AB} = \vec{a} + t\cdot(-\vec{a} + \vec{b}) = (1-t)\vec{a} + t\cdot\vec{b}$

$\{ (1-t)\vec{a} + t\cdot\vec{b} \mid t\in R \}$ je premica p

$\{ t\cdot\vec{a} + (1-t)\vec{b} \mid t\in R \}$ je premica p

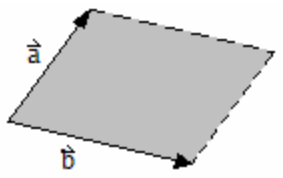
$\vec{a}, \vec{b} \in R^2$

$\vec{a}, \vec{b} \in R^n$

- Kako opisati daljico med A in B?

$\{ (1-t)\vec{a} + t\cdot\vec{b} \mid 0\le t\le 1 \}$

- Kako opisati paralelogram, ki ima eno oglišče v izhodišču, stranici sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$



- Kako opišemo kvadrat

Zaenkrat ne znamo predpisati dolžin in kotov.

SKALARNI PRODUKT

Znova se vrnimo v R^n.

Def.: Skalarni produkt je preslikava, ki slika iz $\circ: R^n x R^n \rightarrow R$

Če sta $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$, potem je

$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \dots + a_n\cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$

LASTNOSTI SKALARNEGA PRODUKTA

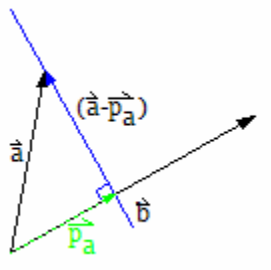
1. Skalarni produkt je komutativen
   $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
2. Je distributiven glede na seštevanje vektorjev
   $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$
   $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$
3. V skalarnem produktu lahko izpostavljamo skalarje
   $\vec{a} \circ (t \cdot \vec{b}) = t \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (t \cdot \vec{a}) \circ \vec{b}$
4. Skalarni produkt je pozitivno definiten
   $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$ in
   $\vec{a} \circ \vec{a} = 0$ natanko takrat ko $\vec{a} = \vec{0}$
   $\vec{a} \circ \vec{a} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \ldots + a_n \cdot a_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$

<u>Def</u>.: <u>Dolžina</u> (ali <u>evklidska norma</u>) vektorja $\vec{a}$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

<u>Def</u>.: Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta <u>pravokotna</u> (ali <u>ortogonalna</u>) natanko tedaj, ko je $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$. Pišemo $\vec{a} \perp \vec{b}$.

<u>Komentar</u>:
Vektor $\vec{0}$ je pravokoten na vse vektorje, tudi sam nase.

<u>Slika</u>:



<u>Def</u>.: <u>Pravokotna projekcija</u> vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ je vektor $\vec{p}_a$, za katerega velja:

- $\vec{p}_a = t \cdot \vec{b}$ pri nekem $t \in R$
- $\vec{a} - \vec{p}_a$ je pravokoten na $\vec{b}$

Kako izračunati pravokotno projekcijo?

$\vec{p}_a = t \cdot \vec{b}$

$(\vec{a} - t \cdot \vec{b}) \circ \vec{b} = 0$

$\vec{a} \circ \vec{b} - t \cdot \vec{b} \circ \vec{b} = 0$

$\vec{a} \circ \vec{b} = t \cdot \vec{b} \circ \vec{b}$

$$t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$$

- če je $\vec{b} = 0$ je $\vec{p}_a = 0$
- če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna, je $\vec{p}_a = 0$
- sicer $\vec{p}_a = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \right) \circ \vec{b}$

<u>Izrek</u>: (Pitagora)

$$\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{p}_a\|^2 + \|\vec{a} - \vec{p}_a\|^2$$

<u>Dokaz</u>:

$$\|\vec{p}_a\|^2 + \|\vec{a} - \vec{p}_a\|^2 = \vec{p}_a \cdot \vec{p}_a + (\vec{a} - \vec{p}_a)(\vec{a} - \vec{p}_a) =$$
$$= \vec{p}_a \cdot \vec{p}_a + \vec{a}(\vec{a} - \vec{p}_a) - \vec{p}_a(\vec{a} - \vec{p}_a) =$$
$$= \vec{p}_a \cdot \vec{p}_a + \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{p}_a - \vec{p}_a(\vec{a} - \vec{p}_a) = \vec{a} \cdot \vec{a} + (\vec{p}_a - \vec{a})\vec{p}_a - \vec{p}_a(\vec{a} - \vec{p}_a) =$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{p}_a(\vec{a} - \vec{p}_a) - (\vec{a} - \vec{p}_a)\vec{p}_a = \|\vec{a}\|^2 - 2 \cdot \vec{p}_a(\vec{a} - \vec{p}_a) = \|\vec{a}\|^2$$

<u>Posledica</u>: (Cauchy – Schwartzova neenačba)

Za poljubna $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je $|\vec{a} \circ \vec{b}| \le \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

<u>Dokaz</u>:

Če $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ je C.S. neenačba izpolnjena.

Če $\vec{a} \circ \vec{b} \ne 0$ uporabimo Pitagorov izrek. Projekcija $\vec{a}$ na $\vec{b}$ je $\vec{p}_a = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \right) \circ \vec{b}$

$$\|\vec{a}\|^2 = \|\vec{p}_a\|^2 + \|\vec{a} - \vec{p}_a\|^2$$

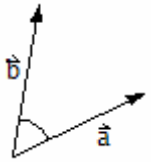
$$0 \le \|\vec{a} - \vec{p}_a\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{p}_a\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - \left(\frac{(\vec{a} \circ \vec{b})}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b} \right) \left(\frac{(\vec{a} \circ \vec{b})}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b} \right) =$$

$$\|\vec{a}\|^2 - \frac{(\vec{a} \circ \vec{b})(\vec{a} \circ \vec{b})}{\|\vec{b}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2} \circ \vec{b} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 - \frac{(\vec{a} \circ \vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2}$$

$$\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 \ge (\vec{a} \circ \vec{b})^2$$

$$\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \ge |\vec{a} \circ \vec{b}|$$

Kot med vektorjema lahko definiramo samo, če sta vektorja neničelna.



Kot je količina iz [0,π] ali [0°, 180°]

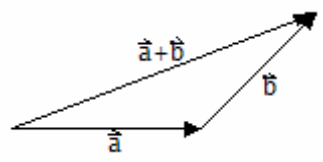
<u>Def</u>.: Kosinus kota φ med neničelnima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ definiramo s

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} \in [-1,1] \leftarrow \text{C.S. neenačba}$$

<u>Izrek</u>: (trikotniška neenakost)

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

<u>Slika</u>:



<u>Komentar</u>:

Stranica v trikotniku je manjša kot vsota dolžin drugih dveh stranic.

<u>Dokaz</u>:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\circ\vec{a} + \vec{a}\circ\vec{b} + \vec{b}\circ\vec{a} + \vec{b}\circ\vec{b} =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + 2\cdot\vec{a}\circ\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \le \|\vec{a}\|^2 + 2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = \left(\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|\right)^2$$

$\le$ ... C.S.

- Kako opišemo kvadrat?

$\{\, t\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b} \mid 0\le t,s\le 1,\ \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|,\ \vec{a}\circ\vec{b} = 0 \,\}$

VEKTORJI V PROSTORU R^3

Vektor $\vec{a} \in R^3$ s tremi koordinatami $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ določa točko v prostoru $T(a_1,a_2,a_3)$ in si ga lahko predstavljamo kot vektor z začetkom v izhodišču in koncem v $T(a_1,a_2,a_3)$.

Vsak vektor $\vec{a} \in R^3$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ so enotski (njihova dolžina je 1) med seboj paroma pravokotni.

Kažejo v smeri koordinatnih osi. Pravimo jim <u>standardna baza</u> R^3 in

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Def.: Vektorski produkt je preslikava $x: R^3 x R^3 \rightarrow R^3$.

Če je $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, potem je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \leftarrow \text{simbolična determinanta}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 \cdot b_3 \circ \vec{i} + a_3 \cdot b_1 \circ \vec{j} + a_1 \cdot b_2 \circ \vec{k} - a_3 b_2 \circ \vec{i} - a_1 b_3 \circ \vec{j} - a_2 b_1 \circ \vec{k} =$$

$$= (a_2 \cdot b_3 - a_3 b_2) \circ \vec{i} + (a_3 \cdot b_1 - a_1 b_3) \circ \vec{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 b_1) \circ \vec{k}$$

Zgled: $\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} = \vec{k}$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + (-1) \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = -\vec{j}$$

Zgled:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \vec{i} - (8+6) \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} = 4 \cdot \vec{i} - 14 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} 4 \\ -14 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \cdot \vec{i} - (-6-8) \cdot \vec{j} + -2 \cdot \vec{k} = -4 \cdot \vec{i} + 14 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} -4 \\ 14 \\ -2 \end{bmatrix}$$

LASTNOSTI

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ (antikomutativen)

2. Vektorski produkt je distributiven glede na vsoto vektorjev
   $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
   $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
   $||$
   $-\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{c} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{b}$
3. V vektorskem produktu lahko izpostavimo skalarje
   $\vec{a} \times (t \cdot \vec{b}) = t \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (t \cdot \vec{a}) \times \vec{b}$

GEOMETRIJSKI POMEN VEKTORSKEGA PRODUKTA

Vektorski produkt (nekolinearnih in neničelnih) vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in na $\vec{b}$, njegova dolžina pa je enaka ploščini paralelograma s stranicama $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
Če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna, je njun vektorski produkt enak vektorju $\vec{o}$.

<u>Naloga</u>:
Izračunaj ploščino trikotnika z oglišči
A(1,-1,0)
B(2,1,-1)
C(-1,1,2)

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1-(-1) \\ -1-1 \\ 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 2-(-1) \\ 1-1 \\ -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 = (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 72$$

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{3 \cdot \sqrt{2}}}$$