Kazalo

Izjavni račun

Izjave

Izjava je stavek, ki je bodisi resničen ali neresničen.

Izjavni vezniki

$$
\begin{aligned}
&negacija\ (ne\ A) - \neg \\
&konjunkcij\ (A\ in\ B) - \wedge \\
&disjunkcija\ (A\ ali\ B) - \vee \\
&implikacija\ (iz\ A\ sledi\ B) - \Rightarrow \\
&ekvivalecna\ (\text{če in samo če}) - \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Izjavni izrazi

Osnovne (enostavne) izjave označujemo s črkami.
Namesto o izjavah bomo govorili o **izjavnih izrazih.**

1. Izjavni konstanti (logični konstanti) 0 in 1 sta izjavna izraza
2. Izjavne spremenljivke p, q, r so tudi izjavni izrazi
3. Če je A izjavni izraz je tudi (¬A) izjavni izraz
4. Če je * dvomestni veznik (* je eden izmed izjavnih veznikov) in sta A in B izjavna izraza, potem je tudi (A*B) izjavni izraz

Vsakemu izjavnemu izrazu pripada resničnostna tabela.

Tavtologija

Izjavni izraz je **tavtologija**, če je resničen pri vseh naborih izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo.

Protislovje

Izjavni izraz je **protislovje**, če je neresničen pri vseh naborih izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo.

Enakovredni izjavni izrazi

Dva izjavna izraza sta **enakovredna**, če imata pri vsakem logičnem naboru vrednosti spremenljivk isto logično vrednost. [A in B imata »isto« resničnostno tabelo]

A in B sta enakovredna natanko tedaj, ko je A⇔B tavtologija.

Zakoni izjavnega računa

- Zakon dvojne negacije
- Idenpotenca
- Komutativnost
- Asociativnost
- Absorbcija
- Distributivnost
- De Morgenova zakona
- Kontrazpozicija
- Lastnosti 1 in 0

- Lastnosti implikacije
- Lastnosti ekvivalence

Polni nabori izjavnih veznikov: DNO in KNO

DNO izraza A je izjavni izraz, ki je enakovreden A. DNO je disjunkcija **osnovnih konjunkcij**. Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij. Osnovne konjunkcije ustrezajo vrsticam v katerih je A resničen. V tako osnovno konjunkcijo zapišemo resnične spremenljivke in negacije neresničnih spremenljivk.

KNO izraza A je izraz enakovreden A. KNO je konjunkcija **osnovnih disjunkcij**. Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij. Osnovne disjunkcije ustrezajo vrsticam v katerih je A lažen (neresničen). V taki osnovni disjunkciji so neresnične spremenljivke in negacije resničnih spremenljivk.

Vsak izjavni izraz, ki ni protislovje ima DNO.

Vsak izjavni izraz, ki ni tavtologija ima KNO.

Za vsak izjavni izraz A, obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje/uporablja samo negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo.

Množica izjavnih veznikov N je **poln nabor** (izjavnih veznikov), če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki uporablja samo veznike iz N.

Sklepanje v izjavnem računu

Izjavni izraz B logično sledi iz izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_k$, pišemo $A_1, A_2, \ldots, A_k \vDash B$, če je B resničen vedno, ko so resnični tudi vsi A-ji.

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k \mid\!= B$ natanko tedaj, ko je $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_k) \Rightarrow B$ tavtologija.

Pravila sklepanja

1.	Modens ponens	MP	$A, A \Rightarrow B \ \vDash B$
2.	Modens tollens	MT	$A \Rightarrow B, \neg B \ \vDash \ \neg A$
3.	Disjunktivni silugizem	DS	$A \vee B, \neg A \ \vDash B$
4.	Hipotetični silugizem	HS	$A \Rightarrow B, B = C \vDash A \Rightarrow C$
5.	Poenastavitev	Po	$A \wedge B \ \vDash A$
6.	Združitev	Zd	$A, B \ \vDash A \wedge B$
7.	Pridružitev	Pr	$A \vDash A \vee B$

Protiprimer

Protiprimer je nabor vrednosti kjer so predpostavke resnične, sklep (zaključek) pa napačen.

Pomožni sklepi

1. Pogojni sklep – uporabimo, ko ima zaključek sklepa obliko implikacije. **$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k \vDash B \Rightarrow C$ ntk., ko iz $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$, B logično sledi zaključek C.**
2. Sklep s protislovjem – **$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k \vDash B$ ntk., ko iz teh istih predpostavk, ki jim dodamo negacijo B sledi protislovje.**

3. Analiza primerov – Analiza primerov uporabljamo, ko ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Predikatni račun

Notranja gradba izjav

Kvantifikatorja

$$\forall - univerzalni\ kvantifikator\ (za\ vsak)$$
$$\exists - eksistenčni\ kvantifikator\ (obstaja)$$

Formulizacija

Univerzalna izjava je ponavadi implikacija.

Eksistenčna izjava je ponavadi konjunkcija.

Izjavne formule

- Spremenljivke – x, y, z
- Konstante - a, b, c, ….
- Predikati – P, Q, R
- Logične povezave
- Kvantifikatorja
- Oklepaja – ()
- Atomi – terme (spremenljivke in konstante) ustavimo v predikate – P(x), P(a), Q(x, y)
- Formule - atomi so formule, če sta Q in V formuli in je x spremenljivka, potem so ¬U, …. Tudi formule

V formuli imamo **proste** in **vezane** spremenljivke. Vstop x-a v formuli je **vezan,** če je ta x v dosegu kvantifikatorja ∀x∃x, sicer je vstop x-a prost.

Enakovredne izjavne formule

$$\neg\forall xW \sim \exists x\neg W$$
$$\neg\exists xW \sim \forall x\neg W$$
$$\forall x\forall yW \sim \forall y\forall xW$$
$$\exists x\exists yW \sim \exists y\exists xW$$
$$\forall x(A \wedge B) \sim \forall xA \wedge \forall xB$$
$$\exists x(A \vee B) \sim \exists xA \vee \exists xB$$

Enakovrednosti

Enakovrednosti z omejitvami

Če se x ne pojavi v A potem veljajo nasledje zveze:

$$\forall x(A \vee B) \sim A \vee \forall xB$$
$$\forall x(A \wedge B) \sim A \wedge \forall xB$$
$$\exists x(A \vee B) \sim A \vee \exists xB$$

$$\exists x(A \wedge B) \sim A \wedge \exists x B$$

Prenexna normalna oblika formule

Za vsako izjavno formulo W obstaja enakovredna izjavna formula W' v kateri se kvantifikatorji pojavijo samo skrajno levo.

Postopek:

1. Preimenujemo spremenljivke v skladu z »željo«
2. Nadomestimo ⇒, ⇔ z ∧,∨ ,¬
3. Izvlečemo kvantifikatorje na levo

Množice

Podajanje množic

$$A = \{1,2,3\} - z\ naštevanjem$$
$$A = \{x;\ \varphi(x)\} - s\ formulo$$

Russellov paradoks

$$R = \{x; x \notin x\}$$

Russellovem paradoksu se izognemo tako, da se omejimo na t.i. **univerzalno množico** ali **svet. Označimo s S!**

Enakost in vsebovanost množic

Množici A in B sta **enaki**, A = B, $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Relaciji nadzarovanosti, biti pomnožica ($A \subseteq B$, A je podmnožica B) $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$

Unija

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

Presek

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

Razlika

$$A \backslash B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\} - \text{"}A\ brez\ B\text{"}$$

Simetrična razlika

$$A + B = \{x; x \in A\ \boldsymbol{xor}\ x \in B\}$$

Komplement

$$A^c = \{x; x \notin A \wedge x \in S\}$$

Enakost množic

1. Zakon dvojnega komplementa
2. Idenpotenca

3. Komutativnost
4. Asociativnost
5. Absorbcija
6. Distributivnost
7. De morgenova zakona
8. Kontrapozicija
9. Lastnosti 0 in S
10. Lastnosti $\subseteq$
11. Lastnost razlike
12. Lastnosti simetrične razlike

Potenčna množica

Potenčna množica množice $A - \mathcal{P}A$ je množica vseh podmnožic množice A.

$$\mathcal{P}A = \{B; B \subseteq A\}$$

Če je A končna množica in ima n elementov, potem je $\mathcal{P}A$ končna in ima 2^n elementov.

$\mathcal{P}A$ ima več elementov kot A. Tudi, če je A neskončna množica.

Družine množic

Pokritje

Družina $A = \{A_i | i \in I\}$ je pokritje množice B, če je $\bigcup A = \bigcup_{i \in I} A_i = B$. Včasih bomo »nemarni« in bomo zahtevali samo $B = \bigcup_{i \in I} A_i$

Razbitje

Družina $A = \{A_i | i \in I\}$ razbitje množice B, če:

- $\bigcup A = B$
- Če vsak $i \in I$ je $A_i = \emptyset$
- Za vsak par $i, j \in I$ za katera velja $i \neq j$, je $A_i \cap A_j = \emptyset$. Elementi razbitja so paroma disjunktni.

Kartezični produkt množic

Kartezični produkt množic A in B, $\boldsymbol{A \times B = \{ (a, b) | a \in A \text{ in } b \in B\}}$

Lastnosti kartezičnega produkta

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D) = (A \times D) \cap (B \times C)$
3. $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \; ali \; B = \emptyset$
4. $A \subseteq B \; in \; C \subseteq D \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$
5. $A \times C \subseteq B \times D \; in \; A \times C \neq \emptyset \Rightarrow A \subseteq B \; in \; C \subseteq D$
6. $če \; je \; A \; končna \; z \; n \; elementi \; in \; B \; končna \; z \; m \; elementi,$
   $potem \; je \; A \times B \; končna \; množica \; z \; m * n \; elementi$

Realacije

Množica R je (dvomestna) relacija, če je vsak njen element urejen par.

R je **relacija** (dvomestna) v množici A, če je $R \subseteq A \times A$

Lastnosti relacij ($R \subseteq A \times A$)

1. Refleksivna $\forall x \in A$ xRx
2. Irefleksivna $\forall x \in A$ $\neg xRx$
3. Simetrična $\forall x, y \in A$ $(xRy \Rightarrow yRx)$
4. Asimetrična $\forall x, y \in A$ $(xRy \Rightarrow \neg yRx)$
5. Antisimetrična $\forall x, y \in A$ $(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$
6. Tranzitivna $\forall x, y, z \in A$ $(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
7. Intranzitivna $\forall x, y, z \in A$ $(xRy \wedge yRz \Rightarrow \neg xRz)$
8. Sovisna $\forall x, y \in A$ $(x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx)$
9. Strogo sovisna $\forall x, y \in A$ $(xRy \vee yRx)$
10. Enolična $\forall x, y, z \in A$ $(xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z)$

Predstavitev relacije z grafom ali tabelo

Elemente množice A narišemo kot točke v ravnini. Če velja aRb narišemo usmerjeno povezavo od a do b.

Matrika relacij R je kvadratna tabelca s k vrsticami in k stolpci, v to zapišemo ničle in enice. V i-to vrstico in j-ti stolpec zapišemo enico, če je $a_i R a_j$, sicer na to mesto napišemo ničlo.

Operacije z relacijami

Naj bo R relacija v A.

R^{-1} inverzna relacija k R, je definirana kot $yR^{-1}x$ ntk. xRy

Naj bosta R in S relaciji v A. Kompozitum (produkt) relaciji R in S označimo z R*S.
Velja: x R*S z ntk. $\exists y \in A : xRy \text{ in } yRz$
Tudi R*S je relacija v A

Algebraična karekterizacija lastnosti relacij

Potence relacij

$R^0 = id_a$, za n>0

Funkcije in preslikave

Definicije

Funkcija je enolična relacija

$f \subseteq A \times B$ je preslikava iz A v B, $f: A \mapsto B$, če je:

- f je funkcija
- $D_f = A$

Namesto xfy pišemo $y = f(x)$.
x je argument f, y je slika/vrednost f pri x

Injektivna preslikava

$$\forall x, x' \in A$$
$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Surjektivna preslikava

Če $Z_f = B$
f je preslikava iz A **na** B

Bijektivna preslikava

Če je injektivna in surjektivna

Inverzna funkcija in preslikava

Če $f: a \mapsto B$

f^{-1} je funkcija ⇔ f je injektivna
f^{-1} je preslikava ⇔ f je bijektivna

Kompozitum preslikav

Kompozitum preslikav $f: a \mapsto B$ in $g: B \mapsto C$, potem je $g \circ f: A \mapsto C$ določimo s predpisom

$$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big)\ za\ vse\ a \in A$$

Opomba: $g \circ f = f * g$

Dirichletov princip

$a: A \mapsto A$, A končna množica

Naslednje trditve so enakovredne:

- f je injektivna
- f je surjektivna
- f je bijektivna

Ekvivalenčna relacija

$R \subseteq A \times A$ je ekvivalenčna (enakovredna) če je:

- refleksivna
- simetrična
- tranzitivna

Kongruence

Obstajata enolično določeni celi števili k, r

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{r} < n$$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{n = k * m + r} \\ \boldsymbol{k\ je\ celoštevilski\ kvocient} \\ \boldsymbol{r\ je\ ostanek} \end{array}\right\} \boldsymbol{n - ja\ pri\ deljenju\ z\ m - jem}$$

m|n, m deli n, ko je ostanek pri deljenju n-ja z m-jem enak 0.

Celi števili x in y sta kongruentni po modulu m, če m|(x-y). To se zgodi natanko tedaj, ko dasta x in y pri deljenju z m isti ostanek.
Pišemo: $x \equiv y(mod\ m)$

Kongruenca po modulu m je ekvivalnečna relacija.

Relacija urejenosti

R delno ureja množico A, če je:

- refleksivna
- antisimetrična
- tranzitivna

R linearno ureja množico A, če je:

- sovisna
- delno ureja A

Posebni elementi v delnih urejenosti

Naj bo A delno urejen z ≤

$m \in A$ je minimalen od A, če je za vse A:X≤m ⇒x=m
$M \in A$ je maximalen v A, če je za vse A:X≥M ⇒x=M

a je prvi v A, če za vse x∈A velja: a≤x
a je zadnji element, če za vse x∈A velja: x≤a

Če v A delno urejeni z ≤, obstaja prvi element ga označimo z min A, zadnji element z max A

A delno ureja z $\leq, B \leq A$
M = { zgornje meje za B v množici A }
m = { spodnje meje za B v množici A }

Če v M obstaja prvi element, mu pravimo najmanjša zgornja meja/natančna zgornja meja/supremum množice B v A. Označimo ga z sup B.

Če v m obstaja zadnji element, mu pravimo največja spodnja meja/natančna spodnja meja/infinum. Označimo ga z inf B.

Leksikografska delna urejenost

(a1, b1) ≤ (a2,b2), ntk a1 < a2 ali a1 = a2 in b1 ≤ b2

Moč množic

Moč končnih množic

A končna množica. Potem |A| označuje število elementov ali tudi moč množice A.

Princip vključitve in izključitve

1. $|A * B| = |A| * |B|$
2. $|B^A| = |B|^{|A|}$
3. $|\mathcal{PA}| = 2^{|A|}$
4. $Če\ B \subseteq A, potem\ je\ |A \backslash B| = |A| - |B|$
   $v\ spošnem\ je\ |A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$
5. $Če\ A \cap B = \emptyset\ potem\ je\ |A \cup B| = |A| + |B|$
   $v\ spošnem\ je\ |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
6. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Moč neskončnih množic

Množici A in B sta enako močni, če obstaja bijektivna preslikava iz A v B.

Množica je neskončna, če je enako močna, kot kaka svoja prava podmnožica.

Algebra

Osnovno o strukturah

Dvomestna operacija je preslikava $A \times B \mapsto C$
n-mestna operacija je preslikava $A_1 \times \ldots . \times A_n \mapsto C$

Preslikava $A \times A \mapsto A$ je notranja dvomestna operacija

Algebrska struktura je
S = (A,B,C (množice), …. , *, % (operacije), …… , R, S (relacije), ….. , e, s, 1, 0 (odlikovani elementi)

Grupoid

Grupoid je algebrska struktura (A, *) kjer jer $*: A \times A \mapsto A$ dvomestna notranja operacija

Komutativnost

Operacija * je komutativna če za vsak a, b velja:

$$a * b = b * a$$

Grupoid v katerem je operacija komutativna imenujemo **Abelov grupoid.**

Asociativnost

Operacija * je asociativna če za vsak a,b,c velja:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Enota

e je enota ali nevtralni element grupoida (G,*) če za vse elemente $a \in G$ velja

$$e * a = a * e = a$$

V grupoidu (G,*) imamo največ eno enoto.

Absorbcijski element

s je absorbcijski element grupoida (G,*), če za vse elemente iz grupoida velja naslednja enačba (a∈G)

$$a * s = s * a = s$$

V grupoidu (G,*) imamo lahko največ en absorbcijski element.

Poenostavljivi element

Element a grupoida(G,*) je poenostavljiv natanko tedaj, ko za vse b,c∈G veljata implikaciji:

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$
$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

Enota je vedno poenastavljiv element.

Obrnljivi element

Element a grupoida (G,*) z enoto e je **obrnljiv**, če obstaja a'∈G za katerega je

$$a * a^{\wedge\prime} = a^{\wedge\prime} * a = e$$

Elementu a' pravimo inverz k a ali inverz elementa a.

V monoidu z enoto e ima vsak element največ **en** inverz. (PAZI: asociativnost potrebujemo)

Podstrukture

Polgrupa

Polgrupa pravimo grupoidu z asociativno operacijo.

Polgrupa (A,*) je **ciklična**, če obstaja g∈A za katerega je <{g}> = A

Monoid

Polgrupi z enoto pravimo monoid.

Grupa

Grupa je monoid v katerem je vsak element obrnljiv.

Homomorfizem in izomorfizem

Recimo, da obstaja bijektivna preslikava 0
$\emptyset: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ za katero je za $\forall a, b \in R$

$$\emptyset(a + b) = 0(a) * 0(b)$$

Potem se $(\mathbb{R}, +)$ in $((0, \infty), *)$ »enako« obnaša, sta **IZOMORFNI.**

Preslikava $h: A \mapsto B$ je **homomorfizem** grupoida $(A, ¤)$ v grupoid $(B,*)$, če za $\forall a1, a2 \in A$

$$h(a1¤a2) = h(a1) * h(a2)$$

Homomorfizem $h: A \mapsto B$ je izomorfizem, če je h bijektivna preslikava.

Naj bo $h: A \mapsto B$ surjektiven homomorfizem iz grupoida v grupid(B,*). Potem h »ohranja« vse »lepe« $(A, ¤)$ lastnosti, ki jih ima operacija ¤ v A:

- **če je ¤ komutativna/asociativna operacija v A, potem je * komutativna/asociativna v B**
- **če je e enota v $(A, ¤)$ potem je $h(e)$ enota v $(B,*)$**
- **če je a' inverz od a v $(A, ¤)$, je $h(a')$ inverz od h(a) v $(B,*)$**

Grupe in podgrupe

Grupa je asociativna algebrska struktura, ki vsebuje enoto in v kateri imajo elementi tudi inverze.

Grupa je urejena trojica $(G,*, e)$, ki zadošča naslednjim pogojem:

- * $G \mapsto G$
- * je notranja operacija
- * je asociativna operacija
- e je nevtralni element
- vsak element grupe je obrnljiv

Lastnosti grup:

- nevtralni element, enota, je enolično določen
- vsak element ima enolično določen inverz
- vsak element je poenastavljiv, v grupi velja krajšanje
- enačbi $a * x = b$ in $y * a = b$ sta enolično reštljivi
- definicijo potence lahko razširimo na negativne eksponente

Neprazna množica $H \subseteq G$ je **podgrupa** v grupi $(G,*,', e)$, če je $(H, * |_{A\times h}, '|_H, e)$ grupa

- H je zaprta za *
- H vsebuje enoto e
- Z vsakim a∈H velja $a' \in H$

Permutacije

Naj bo A poljubna množica. Permutacija na A je vsaka bijektivna preslikava $f: A \mapsto A$

<u>Permutacija reda n</u> je permutacija na {1, …, n}. Množici vseh permutacij reda n pravimo <u>simetrična grupa reda n.</u>

Permutacija množice A je vsaka bijektivna preslikava $f: A \to A$

Množenje permutacij **NI** komutativno.

Zapis s tabelico

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow permutacija\ reda\ 3$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow permutacija\ reda\ 4$$

Inverz permutacij

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Produkt permutacij

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Pi * \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\Psi * \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Zapis permutacije z disjunktnimi cikli

$$\Pi = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 7)(6)$$

Cikle dolžine 1 lahko izpustimo.

Ni važno s katero št. začnemo vedno dobimo isto podmnižico.

Ciklična struktura permutacije

Število ciklov posameznih dolžin v zapisu permutacije s disjunktnimi cikli ➔to je **ciklična struktura permutacij**

Zapis permutacije kot produkt transpozicij

Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt tranzpozicij (ciklov dolžine 2).

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)$$

Parnost permutacij

Denimo da permutacijo Π zapišemo kot produkt n transpozicij, na druga način pa kot produkt m transpozicij. Potem $n \equiv m (mod\ 2)$!

Sode in lihe permutacije

Permutacija je **soda**, če jo lahko zapišemo kot produkt sodo mnogo transpozicij.

Permutacija je **liha**, če jo lahko zapišemo kot produkt liho mnogo transpozicij.

$$\alpha = (1\ 5\ 2\ 6)(3\ 10\ 8\ 9\ 4)(7)$$
$$\sum dolžina\ cikla - 1$$
$$3 + 4 = 7 \rightarrow liha$$

Igra 15

Igra 15 je oziroma uganka 15 je premičnica, ki vsebuje 15 oštevilčenih ploščic in eno prazno mesto na mreži 4×4.

Red permutacije

Red permutacije Π je najmanjše naravno število $k > 0$, za katero velja $\Pi^{\mathrm{k}} = \mathrm{id}$. Označimo: $ord(\Pi)$

Red permutacije Π je najmanjši skupni večkratnik dolžin ciklov v zapisu permutacije Π z disjunktnimi cikli.

$$\alpha = (1\ 5\ 2\ 6)(3\ 10\ 8\ 9\ 4)(7)$$
$$RED = 4 * 5 = 20$$

Kolobarji in obsegi

Osnove

Kolobar je algebrska struktura (A,+,*,0) za katero velja:

- + = seštevanje
- * = množenje
- 0 = ničla
- (A,+,0) je abelova grupa (komutativna)
- (A,*) je polgrupa
- distributivna zakona

Kolobar celih števil

$$(\mathbb{Z}, +, *, \mathbb{0}) in\ enica\ 1$$

Izrek o deljenju, največji skupni delitelj (gcd) in najmanjši skupni večkratnik (lcm)

$$m, n \in \mathbb{Z}, m > 0$$

Obstajata enolično določeni celi števili k in r, za kateri velja $n = km + r$ in $0 \le r < m$. Izkaže se $k = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \Rightarrow m, n \in \mathbb{Z}$.
Pravimo da m deli n (m|n), če $\exists k \in \mathbb{Z}$, da velja $n = km$. V tem primeru je m delitelj števila n in n večkratnik števila m. Če n in m nista oba enaka 0, lahko definiramo njun največji skupni delitelj $\gcd(m, n) = \max\{d; d|m \wedge d|n\}$. Definiramo še $\gcd(0,0) = 0$.

Najmanjši skupni večkratnik $lcm(m, n) = \min\{v; m|v \wedge n|v \wedge v > 0\}$; $lcm(0,0) = 0$; $lcm(0, x) = 0$

Ti dve operaciji sta komutativni in asociatvini.

Razširjeni Evklidov algoritem

Linearne diofantske enačbe

Linearna diofantska enačba z dvema neznankama je ax+by=c, kjer so $a, b, c \in \mathbb{Z}$ in iščemo celoštevilsko rešitev x,y.

Diofantska enačba ax+by=c je rešljiva natanko tedaj, ko d=gcd(a,b) deli c.

Če x', y' rešitve enače, potem vse druge rešitve dobimo z obrazcem

$$x_t = x' + t * \frac{b}{d}$$
$$y_t = y' - t * \frac{a}{d}$$

Obseg realnih števil

Algebrska struktura (A, +, ., 0) je **obseg**, če je:

- (a, +, ., 0) kolobar
- (a\{0}, .) je grupa z enoto 1

Kolobar je obseg če so vsi neničelni elementi obrnljivi (za množenje)

Determinante

Srečamo jih pri sistemih linearnih enačb.

Sistemi linearnih enačb

Matrika dimenzije (reda) m*n je pravokotna tabelica m*n števil, razporejenih v m vrstic in n stolpcev.

Sistem m linearnih enačb z n neznankami je zaporedje enačb.

Gaussov postopek za reševanje

Rang matrike je število neničelnih vrstic po koncu (1. Ali 2. Faze) Gaussovega postopka.

Sistem n linearnih enačb z m neznankami je rešljiv natanko tedaj, ko je rang matrike sistema enak rangu razširjene matrike sistema.

Denimo, da je sistem n linearnih enačb z m neznankami rešljiv in je ranga r. Potem rešitve sestavljajo m-r parametrično družino: to pomeni, da si lahko vrdnosti ustrezno izbranih m-r neznank poljubno izberemo, vrednosti ostalih so s tem izborom enolično določene.

Homogeni sistemi

Sistem linearnih enačb je **homogen**, če ima za desno stran same ničle.

Homogen sistem ima vedno rešitev. Homogen sistem ima <u>netrivialno rešitev</u> (ne samih ničel), če je njegov rang strogo manjši od števila neznank m.

Vektorski prostor

Teoretične osnove

Vektorski prostor (ali linearni prostor) V nad obsegom O je neparna množica z elementi – vektorji, v kateri sta definirani dve operaciji:

- Seštevanje vektorjev (notranja) V×V →V
- Množenje vektorja s skalarjem (zunanja) O×V→V

Operaciji ustrezata naslednjim lastnostim:

1. Za seštevanje je V abelova grupa
2. Množenje s kalarjem je distributivna glede na seštevanje vektorjev:
$$a\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=a*\vec{x}+a*\vec{y}$$
3. Množenje s skalarjem je distributivno glede na seštevane skalarjev: (a+b) $\vec{x}=a\,\vec{x}+b\,\vec{x}$
4. Asociatvinost množenja, za poljubna skalarja in vektor $\vec{x}$ velja naslednje:
$$(a*b)\,\vec{x}=a\left(b*\vec{x}\right)$$

Kolinearnost vektorjev

Vektorja $\vec{a}\ \ in\ \ \vec{b}$ sta <u>kolinearna</u> (vzporedna), če obstaja skalar t, za katerega velja:

$$\vec{a}=t\,\vec{b}\ \ ali\ \ \vec{b}=t\,\vec{a}$$

Linearne kombinacije vektorjev

Če so $\vec{a_1},\vec{a_2},\dots,\vec{a_n}\in\mathbb{R}^n$ vektorji in $t_1,t_2,\dots,t_n\in\mathbb{R}^n$ skalarji, potem pravimo vektorju $t_1*\vec{a_1}+t_2*\vec{a_2}+\cdots+t_n*\vec{a_n}$ **<u>linearna kombinacija</u>** vektorjev $\vec{a_1},\vec{a_2},\dots,\vec{a_n}\in\mathbb{R}^n$

Realni vektorski prostori

Vektorji v R^2

Vsak vektor $\vec{x}$ v ravnini $\mathbb{R}^2$ se da zapisati kot linearna kombinaicija dveh fiksnih, nekolinearnih vektorjev $\vec{a}\ \ in\ \ \vec{b}$

Skalarni produkt

Skalarni produkt je preslikava $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{R}$

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}a1\\ \vdots\\ an\end{bmatrix},\ \vec{b}=\begin{bmatrix}b1\\ \vdots\\ bn\end{bmatrix}$$
$$\vec{a}*\vec{b}=a1*b1+a2*b2+\cdots an*bn=\sum_i a_i*b_i$$

Dolžina vektorja

Dolžina (ali Evklidska norma) vektorja $\vec{a}$,

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Kot med vektorjema

Vektorja sta pravokotna ($\vec{a}$ in $\vec{b}$) (ali ortogonalna), če je $\vec{a} * \vec{b} = 0$ oznaka $\vec{a} \perp \vec{b}$

Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ neničelna vektorja, potem je kot med vektorjema določen z

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{\|\vec{a}\| * \|\vec{b}\|}$$

Pravokotna projekcija

Pravokotna projekcija, vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ je takšen vektor $\overrightarrow{\mathcal{P}a}$, ki

- Je kolinearen z $\vec{b}$
- $\vec{a} - \overrightarrow{\mathcal{P}a}$ je pravokoten na $\vec{b}$

Pitagorov izrek

$$\|\vec{a}\|^2 = \left\|\overrightarrow{\mathcal{P}a}\right\|^2 + \left\|\vec{a} - \overrightarrow{\mathcal{P}a}\right\|^2$$

Cauchy-Schwartzova neenačba

Za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ velja, da je skalarni produkt

$$\left|\vec{a} * \vec{b}\right| \leq \|\vec{a}\| * \left\|\vec{b}\right\|$$

Trikotniška neenakost

$$\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| \leq \|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|$$

Vektorji v R^3

Vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ s tremi koordinatami določa točko $T(a_1, a_2, a_3)$, predstavljamo si ga lahko kot usmerjeno daljico z začetkom v izhodišču in koncem v tej točki.

Vsaj vektor iz $\mathbb{R}^3$ lahko zapišemo kot: $\vec{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$

Vektorji $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ so **enotski** (njihova dolžina je 1) in so med paroma pravokotni. Kažejo v smeri koordinatnih osi, pravimo jim **standardna baza** $\mathbb{R}^3$.

Vektorski produkt

Vektorski produkt X: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definiran samo v prostoru vektorjev s tremi koordinatami.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ ← simbolična determinanta

Lastnosti vektorskiga produkta:

1. Je distributiven glede na vsoto vektorjev
2. Vektorski produkt NI komutatitev
3. Vektorski produkt NI asociativen
4. Izpostavljanje sklarjev

Geometriski pomen: Vektorski produkt (nekolinearnih in neničelnih) vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor, katerega dolžina je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna (ali je kateri od njiju enak $\vec{0}$) je njun vektorski produkt enak $\vec{0}$

Mešani produkt

Mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je skalarni produkt vektorja $\vec{a}$ z vektorskim produktom $\vec{b} \times \vec{c}$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c})$$

Geometriski pomen: Mešani produkt je po absolutni vrednosti enak prostornini paralelepipeda (poševen kvader) s stranicami $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Mešani produkt c $\vec{b}$, $\vec{c}$ je enak 0, če $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ležijo v isti ravnini (so **koplanarni**) (ali je kateri izmed njih enak 0)

Uporaba vektorjev v analitični geometriji

Ravnina v prostoru

1)

Ravnina Ɛ je določena s **točko** A(a1,a2,a3), ki leži v njejn in **normalnim vektorjem** $\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n_1} \\ \boldsymbol{n_2} \\ \boldsymbol{n_3} \end{bmatrix}$, ki je pravokoten nanjo. Točka T(x,y,z) s krajevnim vektorjem $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ leži v ravnini Ɛ, če je $\overrightarrow{AT} = \vec{r} - \vec{r_a}$ pravokoten na normalni vektor $\vec{n}$.

$$\begin{aligned} &(\vec{r} - \vec{r_a}) * \vec{n} = 0 \leftarrow \textit{vektorska enačba ravnine} \\ &x * n_1 + y * n_2 + z * n_3 = d \leftarrow \textit{normalna enačba ravnine} \\ &\frac{x}{a} + \frac{a}{b} + \frac{z}{c} = 1 \leftarrow \textit{segmenta oblika enačbe ravnine} \end{aligned}$$

2)

Ravnina je določena s **tremi točkami.**

3)

Ravnina je določena s točko A in nekolinearnima vektorjema $\vec{e}$ in $\vec{f}$ (ki sta ravnini Ɛ vzporedna)

Premica v prostoru

1)

Premica je določena s točko A $\vec{r_A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ in smernim vektorjem $\vec{e}$.

$$\vec{r} = \vec{r_A} + t * \vec{r} \leftarrow vektorska\ (parametrična)\ enačba\ ravnine$$
$$\frac{x - a_1}{e_1} = \frac{y - a_2}{e_2} = \frac{z - a_2}{e_2} \leftarrow kanonična\ oblika\ enačbe\ premice$$

2)
Premica je opisana kot presek nevzporednih ravnin ε in π.

Razdalje

1) Razdalja točke A od ravnine Ɛ

d(A, Ɛ) je enaka dolžini pravokotne projekcije vektorja $\overrightarrow{BA}$ na normalni vektor $\vec{n_\varepsilon}$ (kjer je B poljubna točka v ravnini Ɛ).

1a) Razadlja premice P od ravnine Ɛ

P in Ɛ imata skupno točko, razdalja je D, razen v primeru, ko je smerni vektor premice P $\vec{e}$ pravokoten na $\vec{n}$ (normalni vektor Ɛ). V tem primeru je d(P, Ɛ) enak razdalji katerekoli točke A s premice P do ravnine Ɛ.

2) Razdalja med premico P in točko B

3) Razdalja premice P_1 od premice P_2

3a)

Lahko se zgodi, da ta P_1 in P_2 vzporedni. To se zgodi takrat, ko je $\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{0}$. V tem primeru je razdalja premice P_1 od premice P_2 enaka razadlji katerekoli točke s premice P_1 do premice P_2.

3b) Kaj pa če premici nista vzporedni

Algebra matrik

Algebra kot algebrska struktura

Množica A je algebra nad obsegom O, če so v njej definirane 3 operacije:

1. Seštevanje $+\colon\ A + A \mapsto A$
2. Množenje s skalarjem $*\colon\ O * A \mapsto A$
3. Množenje $*\colon\ A * A \mapsto A$

A je vektorski prostor za seštevanje in množenje s skalarjem, A je kolobar za seštevanje in množenje. Poleg aksiomov, ki povezujejo po 2 operaciji v vektorskem prostoru oz. kolobarju velja tudi

$$a, b \in O \qquad C, D \in A$$
$$(a * C) * (b * D) = (a * b) * (C * D)$$

Matrika
Matrika <u>dimenzije</u> ali <u>reda</u> m×n je tabela m*n števil razporejenih v m vrstic in n stolpcev.

Enakost matrik
Matriki $A_{m\times n}$ in $B_{p\times q}$ sta enaki (A=B), ko sta enakih dimenzij (m=p in n=q) in imata istoležne koeficiente enake ($a_{ij}=b_{ij}$).

Seštevanje matrik
Seštejemo lahko samo matrike istih dimenzij:

$$(A + B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$$

»seštevamo po koordinatah«

Množenje matrik s skalarji
$a*A_{m\times n}$ je matrika dimenzije m×n, ki jo dobimo tako, da vse koeficiente matrike A pomnožimo z a.

Transponiranje matrik
Matriko transponiramo tako, da zamenjamo vlogi vrstic in stolpcev.

<u>Linearna neodvisnost</u>

Kdaj je družina vektorjev linearno neodvisna oziroma odvisna
Vektorji $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \dots, \vec{x_t}$ so **linearno neodvisni**, če je vsaka linearna kombinacija različna od 0. Razen tiste, kjer so vsi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_t$enaki 0.

$$a_1\ \vec{x_1} + a_2\ \vec{x_2} + a_3\ \vec{x_3} + \dots + a_t\ \vec{x_t} \leftarrow linearna\ kombinacija$$

Vektorji so **linearno odvisni**, če obstaja nabor koeficientov $a_1, a_2, a_3, \dots, a_t$, kjer niso vsi enaki 0, medtem ko je:

$$a_1\ \vec{x_1} + a_2\ \vec{x_2} + a_3\ \vec{x_3} + \dots + a_t\ \vec{x_t} = \vec{0}$$

Vektorji $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \dots, \vec{x_t}$ so linearno odvisni, če se da vsaj en izmed njih zapisati kot linearna kombinacija preostalih.

Kako testiramo linearno neodvisnost
Vektorji $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \dots, \vec{x_t}$ iz $\mathbb{R}^n$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko je

$$\boldsymbol{det}\,[\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \dots, \vec{x_t}] \neq \mathbf{0}$$

Grafi

Osnove

Graf G=(V,E) je struktura sestavljena iz množice točk (vozlišč) V=V(G) in množice povezav E=E(G)

Točke

Elementi E(G) so neurejeni pari točk (množica z dvema elementoma)

Stopnja točke

Stopnja ali valenca točke V, deg(V) je število povezav, ki imajo V za krajišče.

Točkam stopnje 1 pravimo **listi** grafa.
Točkam stopnje 0 pa **izolirane točke.**

Z $\Delta(G)$ označimo največjo stopnjo točk iz G.
Z $\delta(G)$ označujemo najmanjšo stopnjo točk iz G.

Regularnost grafa

Graf G je regularen, če imajo vse točke grafa G isto stopnjo.

Graf je d-regularen, če imajo vse točke grafa G stopnjo enako d. 3-regularnemu grafo pravimo tudi **kubičen graf.**

Izomorfizem grafov

Grafa $G_1 = (V_1,E_1)$ in $G_2 = (V_2,E_2)$ sta **izomorfna**, če obstaja bijektivna preslikava $\varphi: V(G_1)$ $\rightarrow V(G_2)$, za katero velja:

$$\forall u_1,v_1 \in (G_1) : u_1 \sim v_1 \Leftrightarrow \varphi(u_1) \sim \varphi(v_1)$$

Oznaka: $G_1 \cong G_2$, sicer pravimo, da sta grafa neizomorfna.

Izomorfizem grafov ograhanja:

- Število točk
- Število povezav
- Stopnjo točk
- …

Lema o parnosti

V vsakem grafu je sodo mnogo točk lihe stopnje.

Grafična zaporedja in požrešna metoda

Končno zaporedje naravnih števik $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ je **grafično**, če obstaja graf na n točkah, ki ima stopnje točk (po vrsti) enake $d_1,d_2, \dots ,d_n$

Zaporedje $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ je grafično, natanko tedaj ko se »požrešna metoda« uspešno zaključi.

Nekatere družine grafov

1. Polni grafi – vsaki dve točki sta sosedi, označimo K_n
2. Prazni grafi – graf brez povezav – označimo $\overline{K_n}$
3. Polni dvodelni grafi – označimo $K_{m,n}$
4. Cikli – C_n je cikel na n točkah ($n \geq 3$)
5. Poti – P_n je pot na n točkah
6. Hiperkocke - Q_d

Podgrafi

H je **podgraf** grafu G, če je $V(H) \leq V(G)$ in $E(H) \leq E(G)$. Pišemo $H \leq G$.

H je **vpet podgraf** v grafu G, če $H \leq G$ in $V(H) = G(H)$. Odstranimo nekaj povezav.

H je **induciran podgraf** v grafu G če $H \leq G$ in $\forall r = uv \in E(G): u, v \in V(H) \Rightarrow e \in E(H)$. Odstranimo nekaj točk (skupaj z dotikajočimi povezavami).

Sprehodi v grafih

Sprehod

Sprehod S v grafu G = (V,E) je zaporedje točk u_0, u_1, u_2, … , u_{n-1}, u_n pri čemer sta zaporedni točki sprehoda n_i in n_{i+1} sosedi. Dolžina sprehoda $u_0u_1….u_{n-1}u_n$ je enaka n, u_0 je začetek in u_n je konec sprehoda S. Začetku in koncu pravimo tudi krajišča sprehoda. Pravimo, da je S u_0-u_n sprehod.

Pot

Sprehod u_0, u_1, u_2, … , u_{n-1}, u_n je **pot**, če je $u_i \neq u_j$ za vse $0 \leq i < j \leq n$

Obhod in cikel v grafu

Sprehod u_0, u_1, u_2, … , u_{n-1}, u_n je **obhod**, če je u_0=u_n

Sprehod u_0, u_1, u_2, … , u_{n-1}, u_n je **cikel, če je** $c \geq 3$ in je n_0=n_n, siper pa so točke med samo različne.

Povezani grafi

Graf G je **povezan**, če za poljubni točki $u, v \in V(G)$ obstaja u-v sprehod v G.

Povezane komponente grafa

G graf V_1, V_2, V_3, …. , V_k ekvivalnenčni razredi relacije P.

V(G) P = {V_1, V_2, … , V_k }

G[V_1], G[V_2], G[V_3], … , G[V_k] so **povezane komonenta grafa G.**

Razdalja v grafih

Razdalja med točkama u in v v grafu G, d(u,v) je dolžina najkrajšega u-v sprehoda.

Eulerjev obhod in Eulerjevi grafi

Eulerjev obhod v grafu G, je obhod, ki vsebuje vse točke grafa G in »gre« skozi vsako povezavo grafa G natančno enkrat.

G je Eulerjev graf, če vsebuje/dopušča Eulerjev obhod.

G je Eulerjev graf ⇔ G je povezan in imajo vse točke grafa G sodo stopnjo.

Hamiltonov cikel in Hamiltonovi grafi

Cikel v G je Hamiltonov, če vsebuje vse točke grafa G.

Graf G je Hamiltonov, če vsebuje tak Hamiltonov cikel.

Naj ima graf G $n \geq 3$ točk. Če ima vsaka točka v grafu G stopnjo $deg(v) = \frac{n}{2}$, potem je G Hamiltonov.

Naj bo G graf. Denimo da obstaja $0 \neq S \leq V(G)$, $|S| = k$ za katero velja, da ima G-S vsaj k+1 povezanih komponent. Potem G ni Hamiltonov.

Barvanja grafov

k-barvanje vozlišč grafa G je preslikava $C : V(G) \to \{barva\ 1, barva\ 2, \dots, brava\ k\}$ za katero velja, da je $C(u) \neq C(v)$, če $u \sim v$. Sosedi morata biti različnih barv.

Dvodelni grafi

Graf G je dvodelen, če lahko točke grafa G pobarvamo z dvema barvama (npr. črno, rdeče) tako, da bo vsaka povezava imela krajišči različnih barv.

Graf G je dvodelen ⇔ G ne vsebuje (kot podgraf) cika lihe dolžine

Kromatično število

Najmanjše število barv, ki dovoljujejo k-barvanje točk grafa G, imenujemo **kromatično šteilo grafa** in označimo z $\chi(G)$.

Velikost največjega polnega podgrafa

$\omega(G)$ je velikost največjega polnega podgrafa v G.

$\omega(G) < 2$ ntk. G je brez trikonikov

Največja stopnja točke v grafu

$$\omega(G) \leq \chi(g) \leq \Delta(g) + 1$$

Kjer je $\Delta(g)$ največja stopnja točke v grafu.

Brooksov izrek

Naj bo G povezan graf. Če G ni niti lih cikel, niti poln graf, potem je $\chi(g) \leq \Delta(g)$

Drevesa in gozdovi

Drevo
Drevo je povezan graf brez ciklov.

Gozd
Gozd je graf brez ciklov

Prerezna točka
G graf $v \in V(G)$ je prerezna točka, če ima G-u strogo več povezanih komponent kot G.

Prerezna povezava
$e \in E(G)$ je prerezna povezava ali most, če ima G-e strogo več povezanih komponent kot G.

Lastnosti dreves
Če je T drevo z n točkami in m povezavami:

- T je povezan graf
- T je brez ciklov
- $m = n - 1$
- Vsaka povezava v T je most
- Za poljubni točki $u, v \in V(T)$ obstaja natančno ena u-v pot
- Če T dodamo eno povezavo, pridelamo natančno en cikel

Vpeto drevo
G povezavn graf. $T \leq G$ je **vpeto drevo** v G, če je:

- T drevo
- T je vpet podgraf (vsebuje vse točke G)

G povezan graf => G vsebuje vpeto drevo

Ravninski grafi

Ravninski grafi
Graf G je **ravninski,** če ga lahko »naričemo« v $\mathbb{R}^2$ tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata, razen v skupnjih krajiščih. S(G) slika/risba (brez krajišč) v ravnini.

Ravninska risba grafa in lica ravninske risbe
Naj bo G ravninski graf in S(G) njegova **ravninska risba**. Povezana območja množice $\mathbb{R}^2 \backslash S(G)$ imenujemo **lica S(G).**

Ocene za število povezav v ravninskem grafu
G povezan ravninski graf.
n … število točk grafa G

m … število povezav grafa G
f … število lic neke risbe grafa G

Potem je: $n - m + f = 2\ [Eulerjeva\ formula]$

Ravninski graf z $n \geq 3$ točkami ima kvečjemu $3 * n - 6$ povezav.

K_5 ni ravninski graf.
K_n ni ravninski graf, če $n \geq 5$

Dvodelni ravninski graf z $n \geq 3$ točkami ima kvečjemu $Z_n - 4$ povezav

$K_{3,3}$ ni ravninski graf
$K_{m,n}$ ni ravninski, če $m, n \geq 3$
$K_{2,n}$ je ravninski za vse $n \in N$

karakterizacija ravninskih grafov

Graf G je **subdivizija** grafa G, če graf H dobimo iz grafa G tako, da na vsako povezavo grafa G dodamo nekaj (lahko nič) točk.

Izrek Kuratowskega

G je ravninski ⇔ G ne vsebuje subdivizije grafa K_5 niti subdivizije $K_{3,3}$ kot podgraf.

Izrek štirih barv

G ravninski graf:

$$\chi(G) \leq 4$$