13.01.2005

$(R,\cdot)$
$a\cdot b=a^2+b$

1. asoc.

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
$(a\cdot b)\cdot c=(a^2+b)\cdot c=(a^2+b)^2+c=a^4+b^2+c+2a^2b$

$a\cdot(b\cdot c)=a\cdot(b^2+c)=a^2+b^2+c$

$(a^2+b)(a^2+b)$
$a^4+2a^2b+b^2$

2. komutativnost
$a\cdot b=b\cdot a$
$a^2+b=b^2a$ //

3. enota
$e=0$
$e\cdot b=b$
$a\cdot e=a$
$e^2+b=b$
$e^2=0$

4. inverz
$a^{-1}\cdot a=e$
$x\cdot a=e$
$x^2+a=0$
$x^2=-a$ levi inverz obstaja, če $a<0$
$a^{-1}=x=+\sqrt{(-a)}$

$a\cdot x=e$
$a^2+x=0$
$x=-a^2$ desni inverz vedno obstaja

2.

$A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$
$\alpha=\{\ \}$
$\beta=\{a\}$
$\gamma=\{a,b\}$
$\delta=\{a,b,c\}$

$(A,\cup)$
$\beta\cup\beta=\{a\}\cup\{a\}=\{a\}=\beta$

$\cup$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	β	γ	δ
γ	γ	γ	γ	δ
δ	δ	δ	δ	δ

$\alpha \cup \alpha = \alpha$
$\alpha \cup \beta = \beta$
$\alpha \cup \gamma = \gamma$
$\gamma \cup \delta = \delta$

$\beta \cup \gamma = \{a\} \cup \{a,b\}$
$= \{a\} \cup \{a\} \cup \{b\}$
$= \{a,b\} = \gamma$

1.) asociat. JE $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$
2.) enota $e = \alpha$ $e \circ a = a \ \forall a$
$e \cup a = a$
3.) inverz $a^{-1} \circ a = e$
$a^{-1} \cup a = \{\}$
$\alpha^{-1} = \alpha$ $\alpha \cup \alpha = \alpha$
samo α ima inverz
4.) komutat. JE
$a \circ b = b \circ a$ lastnost unije
$a \cup b = b \cup a$

asoc.+enota=monoid

a) $\beta \cup x = \delta$ (ali ima ta enačba rešitev?)
$x = \delta$, ker je $\beta \cup \delta = \delta$
b) $\beta \cup y = \beta$
$y_1 = \beta$
$y_2 = \alpha$
c) $\gamma \cup z = \alpha$
tak z ne obstaja.

HOMOMORFIZMI

$f:(A,\circ) \rightarrow (B,*)$
f homomorfizem, če velja $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$
oper. v $(A,\circ)$ oper. v $(B,*)$

če je f inkejtiven ➔ f je monomorfizem
f surjektiven ➔ f je epimorfizem

1.
$f:(Z,+) \rightarrow (Z,\cdot)$
$f(x) = x$
$a+b = f(a+b) = f(a) \cdot f(b) = a \cdot b$ // ne velja vedno ➔ f ni homomorfizem

2.
$f:(R,+) \rightarrow (R^+,\cdot)$
$f(x) = 2^x$
$2^{a+b} = f(a+b) = f(a) \cdot f(b) = 2^a \cdot 2^b$ $\forall a,b \in R$ ➔ f je homomorfizem

3.

$f(R^+,\cdot) \rightarrow (R,+)$
$f(x)=\log x$
$f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$
$\log(a\cdot b)=\log a + \log b$
$\log (a/b)=\log a - \log b$

4.

$C_{12}=\{e,a,a^2,a^3,\ldots,a^{12}=e$, e je enota$\}$
$f(x)=x^3$ (ali je to homomorfizem?)
$f:C_{12} \rightarrow C_{12}$
$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$
$(x\cdot y)^3=x^3\cdot y^3$

5.

$f:(Z,+) \rightarrow (Z,+)$ = endomorfizem = homomorfizem $A\rightarrow A$
$f(a)=2a$
$f(a+b)=f(a)+f(b)$
$2(a+b)=2a+2b$ (je)

6.

$(A,\cdot)$
monoid $(\exists e)$
$a\in A$ je obrnljiv
$\exists a'$: $a'\cdot a=e$
$a\cdot a'=e$

$f:A\rightarrow A$
$f(x)=a\cdot x\cdot a'$ (ugotovi, ali je f homomorfizem?)
$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$
$f(x\cdot y)=a\cdot x\cdot y\cdot a'$
$f(x)\cdot f(y) =a\cdot x\cdot a'\cdot a\cdot y\cdot a'$
$=a\cdot x\cdot e\cdot y\cdot a'$
$=a\cdot x\cdot y\cdot a'$
$\rightarrow$ f je endomorfizem

MOČ MNOŽIC

$|A|$ = število elementov v množici
$|A\cup B|$ kolikšna je moč unije?
$|A\cup B| = |A|+|B| - |A\cap B|$
$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

1. 1..1000 deljivih s 6, 7 ali 10?
   A={večkratniki 6} = $\{6, 12, 18, \ldots, 6x, x\in N\}$
   B={večkratniki 7}
   C={večkratniki 10}

   $|A\cup B\cup C| =$
   $|A| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$ $\lfloor\ \rfloor$ = navzdol zaokroženo

$|B| = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$
$|C| = \lfloor 1000/10 \rfloor = 100$

$|A \cap B| = \lfloor 1000/42 \rfloor = 23$
$|A \cap C| = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$
$|B \cap C| = \lfloor 1000/70 \rfloor = 14$

$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/210 \rfloor = 4$

$|A \cup B \cup C| = 166+142+100-23-33-14+4 = 342$

2. Vsi ljudje znajo tuj jezik
6 ljudi zna angleško
6 nemško
7 francosko
$N \wedge F=3$
$A \wedge N=4$
$A \wedge F=2$
$A \wedge F \wedge N=1$

Koliko je ljudi?

$|A \cup F \cup N| = 6+6+7-2-3-4+1 = 11$
$|A|=6$
$|N|=6$
$|F|=7$
$|A \cap F \cap N|=1$
$|A \cap F|=2$
$|N \cap F|=3$
$|A \cap N|=4$

Koliko zna samo angleško?
1
$|A \cap (F \cup N)| = |A| - |A \cap F| - |A \cap N| + |A \cap N \cap F| = 6 - 2 - 4 + 1 = 1$

3. 36 učencev
15 že v IT
15 v AT
8 HU
10 $AT \wedge IT$
6 $AT \wedge HU$
6 $IT \wedge HU$
5 $IT \wedge AT \wedge HU$

Koliko jih ni bilo v nobeni?
$|IT|=15$
$|AT|=15$
$|HU|=8$
$|AT \cap IT|=10$

$|AT \cap HU|=6$
$|IT \cap HU|=6$
$|IT \cap AT \cap HU|=5$

$|AT \cup IT \cup HU|=15+15+8-10-6-6+5=21$
36-21=15

4. $R=\{(-8,10),(-1,3),(-1,5),(3,-1),(3,5),(5,-1),(5,3),(10,-8)\} \cup \{(x,x):x \in Z\}$
(GLEJ PAPIR ZA GRAF)
$-8R10 \Leftrightarrow (-8,10) \in R$

	-8	-1	3	5	10	0	1	2 …
-8	1				1			
-1		1	1	1				
3		1	1	1				
5		1	1	1				
10	1				1			
0						1		
1							1	
2								1
…								

ekv. rel: S ($xRy \Rightarrow yRx$) je, R (xRx – diagonala) je, T ($xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$) je

ekv. razred: $\{\{-1,3,5\},\{-8,10\},\{x;\ x \in Z \setminus \{-1,3,5,-8,10\}\}$

5. $A=\{a,b,c,d,e,f\}$
$B=\{a,c,e,g,h,i\}$
$F:A \rightarrow B$
$G:B \rightarrow A$

$F|_{A \cap B} = id_{A \cap B}$ (F na množici $A \cap B$)
$A \cap B=\{a,c,e\}$
oz.:
f(a)=a
f(c)=c
f(e)=e

F(b)=g
F(d)=h
F(f)=i
F je injektivna $\Rightarrow$ F je bijektivna
F je surjektivna $\Rightarrow$ ^

$G|_{A \cap B} = a \rightarrow G(a)=a, G(c)=a, G(e)=a$
G(g)=b
G(h)=c
G(i)=d
G ni injektivna (ker se element ponavlja : a)
G ni surjektivna

$F \circ G: B \rightarrow B$
$F \circ G(x) = F((G(x))$
$B \rightarrow A \rightarrow B$
G F

$G \circ F$
$G \circ F(x) = G(F(x))$
$x \in A \rightarrow B \rightarrow A$
G F

$F \circ G = (a, c, e, g, h, i)$
(a, a, a, g, c, h)

$F \circ G(a) = F(G(a)) = F(a) = a$

$G \circ F = (a, b, c, d, e, f)$
(a, b, a, c, a, d)

$F^{-1}: B \rightarrow A$

F=(a, b, c, d, e, f)
(a, g, c, h, e, i)

$F^{-1} = (a, c, e, g, h, i)$
(a, c, e, b, d, f)

$F^{-1} \circ F = (a, b, c, d, e, f)$
(a, b, c, d, e, f)

6. $f: N \rightarrow N$
$f(1) = 1$
$f(n+1) =$ {6-f(n), če $f(n) \geq 5$
{$(f(n))^2+1$, če $f(n) < 5$

f(6)=?
$f(2) = f^2(1)+1 = 2$
$f(3) = f^2(2)+1 = 2^2+1 = 5$
$f(4) = 6-f(3) = 6-5 = 1$
$f(5) = 2$
$f(6) = 5$
1 |-> 1
2 |-> 2
3 |-> 5
4 |-> 1
5 |-> 2
6 |-> 5
...
$Z_f = \{1,2,5\}$
injektivno če se števila nebi ponavljala ➔ f ni injektivna
surjektivno če se na desni strani pojavijo vsa števila ➔ f ni surjektivna (samo 1, 2, 5)