Logika in izjavni račun

1. Zapiši pravilnostne tabele za negacijo, in, ali, ekskluzivni ali, implikacijo, ekvivalenco, nein in neali.

2. Zapiši prioritetno tabelo logičnih operacij.

3. Tone je izjavil ljubici: če mi bo oče posodil avto, bom prišel pod okno in vrgel kamen.

   (a) zapiši izjavo s simboli

   (b) Ali je Tone dobil avto, če ni prišel pod okno in vrgrel kamna.

4. Če zunaj sneži, so vse osebe v tem prostoru pavijani.

   (a) zapiši izjavo s simboli

   (b) ali izjava drži

   (c) kaj je negacija te izjave

5. Katere od spodnjih izjav so ekvivalentne izjavi: vse papige so zelene?

   (a) če je reč zelena, je to papiga

   (b) če je nekaj papiga, potem je to zeleno

   (c) če nekaj ni zeleno, potem to ni papiga

   (d) če nekaj ni papiga, potem to ni zeleno

6. Sestavi pravilnostno tabelo v naslednjih primerih:

   (a) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

   (b) $p \wedge \neg q \Rightarrow r \iff \neg p \vee r$

   (c) $\neg p \Rightarrow (\neg r \iff q \underline{\vee} p \uparrow r)$

7. Ali so naslednje izjave enakovredne?

   (a) $p \wedge (p \vee q) = p$

   (b) $p \vee (p \wedge q) = p$

   (c) $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

   (d) $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

   (e) $p \wedge (q \vee r) = \neg(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$

8. Določi sestavljeno izjavo A tako, da bo imela v pravilnostni tabeli naslednje vrednosti:

   (a) 0010

   (b) 11011111

(c) 10110011

9. Zapiši naslednje izjave v izbrani obliki $(\neg, \wedge, \vee)$:

   (a) $(p \Rightarrow \neg\,(q \vee r)) \downarrow (p \Rightarrow r)$
   (b) $p \veebar (q \Rightarrow r)$
   (c) $p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r$

10. Preveri ali so naslednji nabori izjavnih povezav polni:

    (a) $\{\vee, \neg\}$
    (b) $\{\wedge, \neg\}$
    (c) $\{\Rightarrow, \neg\}$
    (d) $\{\vee, \wedge, \Rightarrow\}$

11. Zapiši pravila sklepanja! (Modus ponems, modus tollens, disjuktivni silogizem, hipotetični silogizem, poenostavitev, združitev, pridružitev, pogojni sklep, redukcija na absurd)

12. Šel bom na tekmo. Zvečer bom napisal nalogo. Če grem na tekmo in nato še v kino, ne bom utegnil napisati naloge.

    Ali lahko sklepamo, da ne morem iti v kino.

13. Ta žival ali ni ptič ali pa ima krila. Če je ta žival ptič, potem leže jajca. Ta žival nima kril, zato ne leže jajc!

    Ali je sklep pravilen?

14. Ali lahko iz danih predpostavk pravilno sklepamo?

    (a) $p \vee q \Rightarrow r \wedge s, s \vee t \Rightarrow u$
        $\models r \wedge s$
    (b) $p \Rightarrow q, r \Rightarrow s, p \vee r$
        $\models r \wedge s$
    (c) $p \Rightarrow q, p \Rightarrow \neg q$
        $\models \neg p$
    (d) $p \Longleftrightarrow q, \neg p, \neg(q \Rightarrow r) \vee t, s \wedge t \Rightarrow r$
        $\models r \wedge \neg q$
    (e) $p \Longleftrightarrow q, \neg p, \neg(q \Rightarrow r) \vee t, s \vee t \Rightarrow r$
        $\models r \wedge \neg q$

15. Ali je naslednje sklepanje resnično: Če delam imam denar. Če lenarim sem zadovoljen. Če lenarim nimam denarja. Če delam nisem zadovoljen. Lahko delam ali lenarim. Ali je res, da sem zadovoljen samo, če nimam denarja.

16. Zapiši takšne enakovredne izjave, da bodo negacije samo pred predikati:

    (a) $\neg\exists x : (P(x) \wedge \exists y : (T(y) \wedge S(x, y)))$
    (b) $\neg(\neg(\exists x : P(x) \Rightarrow \forall x : Q(x, y)) \vee \forall x : \neg P(x))$
    (c) $\neg((\neg\exists x : P(x) \vee \forall x : Q(x)) \wedge (R(x) \Rightarrow \forall x : S(x)))$.

Časovna zahtevnost

17. Oceni časovno zahtevnost algoritma:

    $\min = a_1$; $\max = a_1$;

    for $i = 1$ to n do

        if $a_i < \min$ then $\min = a_i$;

        if $a_i > \max$ then $\max = a_i$.

    Kako lahko izboljšaš algoritem?

18. Zapiši algoritem za vsoto prvih n naravnih števil in ugotovi časovno zahtevnost. Kaj pa vsota n zaporednih naravnih števil: $k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+n)$? Poišči način za izračun v konstantnem času.

19. Zapiši algoritem za množenje dveh $n \times n$ matrik in ugotovi časovno in prostorsko zahtevnost.

20. Zapiši algoritem za izračun vrednosti polinoma $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in ugotovi časovno zahtevnost algoritma. Poišči tudi algoritem z linearno časovno zahtevnostjo.

21. Zapiši algoritem, ki poišče vse delitelje števila n in ugotovi njegovo časovno zahtevnost.

Teorija števil

22. Zapiši tabeli za seštevanje in množenje po modulu 6.

23. Reši enačbe:

    (a) $x \equiv 4^{2002} \bmod 5$,
    (b) $y \equiv 3^{2002} \bmod 5$,
    (c) $z \equiv 2^{2002} \bmod 5$,
    (d) $u \equiv 2^{50} \bmod 7$.

24. Pokaži, da število 17 deli vsa števila oblike $8^n + 9^n$ za vsa liha števila n.

25. Pokaži veljavnost naslednje trditve: $6.4^n \equiv 6 \bmod 9$.

26. Določi ostanek pri deljenju števila $1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 100!$ s številom 12.

27. Pokaži veljavnost naslednjih trditev:

    (a) Za vsa liha cela števila a je $a^2 \equiv 1 \bmod 8$.
    (b) Za poljubno celo število a velja $a^3 \equiv x \bmod 9$, $x \in \{0, 1, 8\}$.
    (c) Za poljubno celo število a velja $a^3 \equiv a \bmod 6$.
    (d) Za poljubno celo število a, ki ni deljivo z 2 in s 3, velja $a^2 \equiv 1 \bmod 24$.

28. Poišči največji skupni delitelj števil

    (a) 512 in 804,
    (b) 603 in 285,
    (c) 528 in 312.

29. Reši enačbe, če obstaja rešitev:

    (a) $3x \equiv 2 \bmod 4$,
    (b) $6x \equiv 3 \bmod 27$,
    (c) $12x \equiv 7 \bmod 21$,
    (d) $12x \equiv 7 \bmod 84$,
    (e) $12x \equiv 7 \bmod 35$.

30. Reši sistem kongurenc:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &\equiv 1 \bmod 7, \\ 3x + 3y + z &\equiv 2 \bmod 7, \\ 5x + 6y + 3z &\equiv 3 \bmod 7. \end{aligned}$$

31. Reši Diofantske enačbe:

    (a) $16x + 9y = 1$,
    (b) $16x + 9y = 4$,
    (c) $283x + 1722y = 31$,
    (d) $365x + 727 = 18$.

32. Janez ima dve peščeni uri. Ena izmeri 6 minut, druga pa 11 minut. Kako naj izmeri 13 minut?

33. Eulerjeva funkcija $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je enaka številu števil, ki so manjša od n in hkrati tuja z n. Izračunaj $\varphi(6)$, $\varphi(7)$, $\varphi(15)$ in $\varphi(29)$.

34. Zakodiraj besedi KOLOKVIJ in IZPIT z modulom $Q = 29$ in kodirnim številom $s = 5$ ($a^5 \equiv ? \bmod 29$). Določi še dekodirno število t ($ts \equiv 1 \bmod \varphi(Q)$) in dekodiraj besedo ŽVEK.

35. Zakodiraj besedi VLAK ODPELJE z matriko A po modulu $Q = 26$, če je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 12 \end{bmatrix},$$

če preslikuješ po dve črki hkrati. dekodiraj še besedo NCLG.

36. S pomočjo Kitajskega izreka o ostankih reši:

   (a) $x \equiv 1 \bmod 7$, $x \equiv 4 \bmod 9$ in $x \equiv 3 \bmod 5$;

   (b) $x \equiv 2 \bmod 3$, $x \equiv 3 \bmod 5$ in $x \equiv 2 \bmod 7$.

37. O številu x vemo naslednje:

   (a) x^2 je liho število,

   (b) $5x - 2$ je deljivo s 3,

   (c) $2x$ je oblike $10k + 6$, $k \in \mathbb{Z}$,

   (d) $4x \equiv 8 \bmod 14$.

   Poišči vsa ta števila.

38. S pomočjo Kitajskega izreka o ostankih reši kongurenčno enačbo $17x \equiv 9 \bmod 276$, tako da 276 razdeliš na faktorje.

39. V košari so jajca. Če jajca razdelimo na dva dela ostane eno jajce, če na tri dele ostaneta dve jajci, če na štiri dele ostanejo tri jajca, na pet delov ostanejo štiri jajca, na šest delov ostane pet jajc in na sedem delov ne ostane nobeno jajce. Kolikšno je najmanjše število jajc v košari?

Kombinatorika

40. Vsak uporabnik računalniškega sistema ima uporabniško ime, ki je sestavljeno iz pet, šest ali sedem znakov, ki so lahko velike tiskane črke slovenske abecede ali števila. Vsako uporabniško ime se začne z črko in vsebuje vsaj eno cifro. Koliko je vseh uporabniških imen?

41. Od 100 učencev se jih 28 ukvarja s košarko, 30 z rokometom in 42 z nogometom. Med njimi 8 s košarko in rokometom, 10 s košarko in nogometom ter 5 z rokometom in nogometom. Trije učenci se ukvarjajo z vsemi športi hkrati. Koliko učencev se ne ukvarja z nobenim športom?

42. Koliko naravnih števil od 1 do vključno 1000 ni deljivih ne z 2, ne s 3 in ne s 5?

43. Točke ravnine pobarvamo z dvema barvama. Pokaži, da vedno obstaja enako pobarvan par točk na razdalji ena.

44. Naj bo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ končno zaporedje celih števil. Pokaži, da vsebuje strnjeno podzaporedje, katerega vsota je deljiva z n. Pomagaj si z delnimi vsotami in ostanki pri deljenju.

45. Naj bo množica S podmnožica od $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ z $n+1$ elementi. Pokaži, da obstajata dve različni števili $x, y \in S$, da x deli y. Pomagaj si z zapisom $x = 2^r a$, kjer je a liho število.

46. Na koliko načinov lahko razporedimo v vrsto 5 študentov, 4 študentke, 3dijake in 3 dijakinje, če

    (a) naj predstavniki posameznih skupin stojijo skupaj?

    (b) so poljubno premešani?

    (c) morajo študentje stati skupaj, ostali pa poljubno?

47. Na koliko načinov lahko razdelimo 12 različnih predmetov med 3 ljudi, če vsak dobi 4 predmete?

48. Koliko števil, ki so večja od 2000 in manjša od 5000 lahko zapišemo s ciframi $0, 2, 4, 6$ in 8,če se cifre ne smejo ponavljati?

49. Koliko zaporedij s šestimi črkami imamo v slovenski abecedi, če

    (a) zaporedje vsebuje natanko en vokal?

    (b) zaporedje vsebuje vsaj en vokal?

50. V ravnini je n točk, od katerih nobena trojica ne leži na isti premici, določajo pa natanko n trikotnikov. Izračunaj n.

51. Koliko je pravih štirimestnih števil (0 ne sme biti na prvem mestu), pri katerih je vsaka naslednja cifra večja od prejšnje?

52. Kakšen je koeficient pri $x^8 y^9$ v $(3x - 2y)^{17}$?

53. Prvi igralec ima 3 karte in drugi 9 kart. Na koliko načinov lahko zamenjata karte (eno ali več), da bosta po zamenjavi imela enako število kart kot na začetku?

54. Po Sahari gre karavana sestavljena iz n kamel. Na koliko načinov se lahko po počitku v oazi razporedijo tako, da nobena kamela ne hodi za isto kamelo kot je hodila pred počitkom? Naredi še poseben primer za $n = 4$. Pomagaj si z oznako A_i–vsaj i kamel hodi za istimi kamelami kot prej.

55. Naj bo $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Koliko je med vsemi permutacijami množice S takih, da je vsaj eno izmed števil na tistem mestu, ki mu pripada po naravnem vrstnem redu. Pomagaj si z oznako A_k–vsaj k števil je na pravem mestu. Kakšen je rezultat za $n = 4$?

56. Na koliko načinov lahko zapišemo število 9 kot vsoto nekaj naravnih števil? Vrstni red ni pomemben.

57. Koliko rešitev ima enačba $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ za $x_i \in \mathbb{N}$ ($x_i \in \mathbb{N}_0$), če

 (a) ni nobenih omejitev?
 (b) velja $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$ in $x_3 \geq 4$?
 (c) velja $x_1 \leq 6$, $x_2 \leq 5$ in $x_3 \leq 7$?

Diferenčne enačbe

58. Reši naslednje homogere diferenčne enačbe:

 (a) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0$, $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$,
 (b) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, $a_0 = -2$ in $a_1 = 3$,
 (c) $a_{n+1} - 3a_n - 10a_{n-1} = 0$, $a_0 = \frac{1}{2}$ in $a_1 = -\frac{1}{2}$,
 (d) $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $f_0 = 1$ in $f_1 = 1$,
 (e) $a_{n+2} - 8a_{n-1} = 0$, $a_0 = 3, a_1 = 2$ in $a_2 = 1$,
 (f) $a_{n+3} - 8a_{n+1} - 9a_{n-1} = 0$.

59. Poišči splošno rešitev naslednjih nehomogenih diferenčnih enačb:

 (a) $2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 4n2^n$,
 (b) $a_{n+2} + a_n = n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$,
 (c) $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 12n^2$,
 (d) $a_{n+1} + 9a_{n-1} = 5 \cdot 2^n - 162n^2$,
 (e) $a_n - 4a_{n-2} = 1 + 2^n$.

60. Reši začetno nalogo naslednjih nehomogenih diferenčnih enačb:

 (a) $a_{n+2} - 4a_n = 2 - 8n, \quad a_0 = 0$, in $a_1 = 5$,
 (b) $a_n + 4a_{n-1} + 5a_{n-2} = 10\,(-3)^n$, in $a_0 = 4,\ a_1 = 0$,
 (c) $a_{n+4} + 2a_{n+3} + a_{n+2} = (-1)^n n, \quad a_0 = -3$, in $a_1 = -1$,
 (d) $4a_{n+2} + a_n = 2\cos\frac{\pi n}{2}, \quad a_0 = 0$, in $a_1 = 1$.

Relacije

61. Zapiši lastnosti relacij.

62. Relacija na množici $A = \{a, b, c, d, e\}$ je podana z

$$R = \{(a,b), (b,c), (b,e), (c,c), (c,d), (e,a), (e,d)\}.$$

(a) Nariši graf relacije R!

(b) Določi R^{-1}, R^2 in R^3!

(c) Kakšne lastnosti ima (di)graf?

63. Na množici $A = \{\check{c}, \check{s}, \check{z}, \acute{c}, d\check{z}, lj, nj\}$ imamo definirani relaciji:

$$R = \{(\check{c}, \check{s}), (\check{c}, d\check{z}), (d\check{z}, lj), (nj, lj), (\check{z}, \acute{c}), (d\check{z}, \check{c}), (\check{s}, lj), (\check{s}, \check{c}), (\check{z}, d\check{z})\}$$
$$S = \{(\check{s}, \check{z}), (lj, \check{c}), (nj, \acute{c}), (d\check{z}, \check{z}), (\acute{c}, \check{c}), (\check{z}, d\check{z}), (\check{c}, \check{s})\}.$$

Zapiši relacije $R \cup S$, $R \cap S$ in $S \backslash R$.

64. Dokaži ali ovrzi, če je $E = \{(x, x); \ x \in A\}$:

(a) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$,

(b) $R * R^{-1} \subseteq E$,

(c) $R * R^{-1} \supseteq E$,

(d) $R * R^{-1} = E$.

65. Dokaži naslednji imlikaciji:

(a) če sta relaciji R in S tranzitivni, je tudi relacija $R \cap S$ tranzitivna.

(b) če sta relaciji R in S simetrični, je tudi relacija $R \cup S$ simetrična.

66. Relacija B je definirana s predpisom: $xBy \iff x$ je prebral knjigo, ki jo je napisal y. Kaj predstavljajo relacije B^2, B^{-1}, $B * B^{-1}$ in $B^{-1} * B$?

67. Relacija O je definirana s predpisom: $xOy \iff x$ je oče y. Kaj predstavljajo relacije O^2, O^{-1}, $O * O^{-1}$ in $O^{-1} * O$?

68. Relacijo R, ki jo predstavlja digraf na sliki 1 predstavi z matriko. Predstavi tudi relacijo R^2.

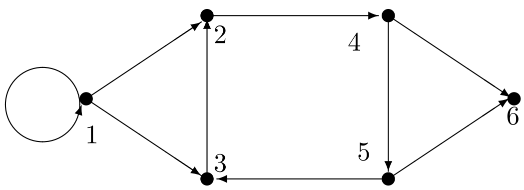

Figure 1: Relacija R za nalogo 68.

69. Dokaži ali ovrzi naslednje trditve:

(a) če je relacija R tranzitivna in antisimetrična, je relacija R^2 antisimetrična.

(b) če je relacija R sovisna in asimetrična, je relacija R^2 sovisna in asimetrična.

(c) če je relacija R tranzitivna in irefleksivna, je relacija R^2 asimetrična.

70. V množici dvomestnih števil $\{10, 11, \ldots, 98, 99\}$ je definirana relacija Q : če je $x = x_1x_2$ in $y = y_1y_2$, tedaj je $xQy \Longleftrightarrow x_1 \geq y_1 \vee x_2 \geq y_2$. Ali je Q refleksivna, antisimetrična, tranzitivna ali sovisna?

71. Ugotovi, kaj je refleksivna ovojnica relacije R!

72. Pokaži, da ima tranzitivno-refleksivna ovojnica R^* relacije R, naslednje lastnosti:

    (a) $R^*R^* = R^*$,

    (b) $(R^*)^* = R^*$

    (c) $(E \cup R)^* = R^*$.

73. Dokaži: $xR^*y \Leftrightarrow$ v grafu relacije R obstaja sprehod (pot) med x in y.

74. Zapiši Warschalov algoritem in z njim poišči $\overline{R}$ relacije

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (e, d)\}.$$

75. Nad množico $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ je relacija R podana z matriko:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nariši grafa R in $\overline{R}$ ter določi matriko $\overline{R}$.

76. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ je podana relacija

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 6), (4, 5), (4, 7), (5, 2), (5, 6), (6, 4)\}.$$

Nariši graf R in zapiši matriko $\overline{R}$.

77. Na množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je definirana relacija $\sim$: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a - c = b - d$. Preveri, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in ugotovi kaj so ekvivalenčni razredi.

78. Na množici $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ je definirana relacija $\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{R}$. Preveri, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in ugotovi kaj so ekvivalenčni razredi.

79. Na množici $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vpeljemo relacijo R s predpisom:

$$(a,b)\,R\,(c,d) \Leftrightarrow \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

Ali je R ekvivalenčna relacija?

80. Točke $T_1, T_2, \ldots, T_{18}$ so ogljišča pravilnega 18 kotnika. Vpeljimo relacijo R_d s predpisom: $T_i R_d T_j$ natanko tedaj, ko lahko iz ogljišča T_i pridemo v ogljišče T_j v d korakih (v obe smeri), kjer je $1 \leq d \leq 9$.

    (a) Za katere d je R_d ekvivalenčna relacija?

    (b) Izračunaj tranzitivno ovojnico za R_3!

Urejenosti in mreže

81. Katere od relacij $\leq$, $<$, $\subset$, $\subseteq$, $\parallel$ in $\perp$ so urejene delno, linearno, strogo delno ali strogo linearno za ustrezne množice.

82. Pokaži, da je relacija deljivosti $\mid$ nad množico $\mathbb{N} \backslash \{1\}$ delno urejena in ugotovi, kaj so $\mid$-minimalni, $\mid$-maksimalni, $\mid$-prvi in $\mid$-zadnji elementi, če obstajajo.

83. Množico $\{2, 3, 6, 7, 21, 25, 30, 35, 210, 500\}$ delno uredi z relacijo deljenja, nariši Hassejev diagram in ugotovi posebne elemente.

84. Na množici $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$ z relacijo

$$R = \{(1,2), (2,3), (2,6), (3,9), (4,5), (4,7), (5,2), (5,6), (6,9)\}$$

poišči posebne elemente.

85. Kateri izmed Hassejevih diagramov na sliki 2 predstavlja mrežo?

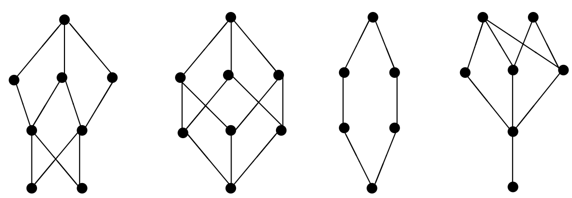

Figure 2: Hassejevi diagrami za nalogo 85.

86. Dokaži, da v vsaki končni mreži obstajata prvi in zadnji element.

87. Poišči primer mreže :

(a) z zadnjim in brez prvega elementa.
(b) z prvim in brez zadnjega elementa.
(c) brez prvega in brez zadnjega elementa.

88. Sestavi Hassejev diagram mreže $\mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$. Kaj je inf in kaj je sup?

89. Poišči primer neomejene mreže, omejene nedistributivne mreže in distributivne neomejene mreže.

90. Pokaži, da je mreža $(\mathbb{N}, \max, \min)$ distributivna.

91. Pokaži, da je množica $\mathbb{N}$ z relacijo $|$ distributivna mreža, če smiselno uvedeš operaciji inf in sup. Ali je to tudi omejena mreža.

92. Pokaži, da je množica $(\mathrm{Del}(110), D, v, ')$, kjer je $a' = \frac{110}{a}$ Boolova algebra in nariši mrežo.

93. Ali je množica $(\mathrm{Del}(75), D, v, ')$, kjer je $a' = \frac{75}{a}$ Boolova algebra in nariši mrežo.

94. Ali je množica $(\mathrm{Del}(330), D, v, ')$, kjer je $a' = \frac{330}{a}$ Boolova algebra in nariši mrežo.

95. Naj bo $B = (A, \cap, \cup, ')$ Boolova algebra. Pokaži, da je tedaj Boolova algebra tudi $B^2 = (A \times A, \cap_2, \cup_2, ^*)$, če so

$$\begin{aligned}(a,b)^* &= (a', b'), \\ (a,b) \cap_2 (c,d) &= (a \cap c, b \cap d) \text{ in} \\ (a,b) \cup_2 (c,d) &= (a \cup c, b \cup d).\end{aligned}$$

Kaj sta elementa 0 in 1 v B^2?

Algeberske strukture z eno operacijo

96. Na množici $\mathbb{R}$ je definirana binarna operacija $*$ s predpisom:

$$a * b = 1 - (a+b) + 2ab.$$

(a) Ali je $*$ asociativna?
(b) Ali obstaja enota za $*$?
(c) Ali obstaja absorpcijski element za $*$?
(d) Določi množico obrnljivih elementov!

97. Definirajmo operacijo $\cdot$ s predpisom: $a \cdot b = ab - 1$.

(a) Ali je $(\mathbb{Z}, \cdot)$ grupoid?
(b) Ali je $(\mathbb{N}, \cdot)$ grupoid?

98. Ali je $(\mathbb{Z}, \circ)$ polgrupa, če je $\circ$ definiran s predpisom: $a \circ b = 3(a+1)(b+1) - ab$?

99. Dopolni Cayleyevo tabelo, da bo $(\{a, b, c\}, *)$ polgrupa, če je:

(a) $\begin{array}{cccc} * & a & b & c \\ a & c & a & b \\ b & a & b & c \\ c & & & a \end{array}$,

(b) $\begin{array}{cccccc} * & a & b & c & d & e \\ a & & & & & d \\ b & & & & & \\ c & & & & & \\ d & & & d & & \\ e & & c & & & \end{array}$.

100. Za katere vrednosti $k, m, n \in \mathbb{Z}$ je množica $\mathbb{Z}$ polgrupa in kdaj je monoid za operacijo
$$a * b = kab + m(a+b) + n.$$

101. Ali je množica števil oblike $\frac{1+2p}{1+2q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ grupa za množenje? Ali je Abelova?

102. Ali je $(\mathbb{R}, \cdot)$ grupa? Kaj je treba spremenit, da postane grupa?

103. Ali je $(\mathbb{Q}, *)$ grupa, če je $*$ definirana s predpisom: $a * b = a + b - 2ab$? Kaj je treba spremeniti, da postane grupa?

Grupe

104. V grupi G reši enačbo $x^2 = x$.

105. Sestavi Cayleyevo tabelo za grupo $\mathbb{Z}_9$. Poišči vse njene podgrupe!

106. Ali je $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ podgrupa grupe $(\mathbb{Z}, +)$? Zapiši še vse podgrupe grupe $(\mathbb{Z}_{18}, +_{18})$.

107. Pokaži, da sta naslednji strukturi podgrupi edinki:

   (a) $\ker f = \{x \in G \,|\, f(x) = e'\}$, če je $f : G \to G'$ homomorfizem grup;

   (b) $Z(G) = \{x \in G \,|\, xy = yx \text{ za vsak } y \in G\}$.

108. V grupi $G = (\mathbb{Z}_{20}, +_{20})$ poišči podgrupo H s petimi elementi. Ali je H edinka? Napiši odseke grupe G po podgrupi H.

109. Preslikava h ciklične grupe C_{12} vase je določena s predpisom $h : a \longmapsto a^3$. Ali je h homomorfizem? Določi njegovo jedro $\ker h$ in odseke po jedru.

110. Določi vse podgrupe in grupo avtomorfizmov grupe C_{15}.

111. Pokaži, da je grupa $(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_2, +_2)$ izomorfna grupi $(\mathbb{Z}_6, +_6)$.

112. V množico celih števil $\mathbb{Z}$ vpeljemo operacijo $a * b = a + b - 3$. Ali je $(\mathbb{Z}, *)$ izomorfna strukturi $(\mathbb{Z}, +)$?

113. Grupa $GL(2, \mathbb{R})$ je grupa obrnljivih 2×2 matrik z realnimi koeficienti. Zapiši podgrupo, ki je generirana z elementom

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Simetrične grupe

114. Ali je $(S_n, \circ)$ grupa? Koliko elementov vsebuje grupa S_n?

115. Izračunaj:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} =,$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} =.$

116. Zapiši permutacijo kot produkt ciklov z različnimi elementi:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} =,$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 8 & 4 & 7 & 3 & 2 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix} =.$

117. Določi permutacijo $\alpha^2 \circ \beta^{-1}$, α, $\beta \in S_8$, če sta:

$$\alpha = (1,2,3)(4,5,6,8) \text{ in } \beta = (3,4)(5,2,6,1,8).$$

118. V grupi $(S_8, \circ)$ reši enačbo $\alpha \circ \pi \circ \beta = \gamma$, če so

$$\begin{aligned} \alpha &= (1,3,5,7) \circ (2,4,6,8) \\ \beta &= (1,5,3) \circ (2,4,6) \circ (7,8) \\ \gamma &= (1,5) \circ (2,8). \end{aligned}$$

119. Preveri ali permutaciji α in β^{-1} komutirata, če sta

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

120. Določi najmanjšo podgrupo, ki vsebuje:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ v S,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ v S,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ v S_6.

Teorija grafov

121. Kateri grafi na sliki 3 imajo večkratne povezave, kateri vsebujejo zanke, kateri so enostavni, kateri so povezani in kateri so polni?

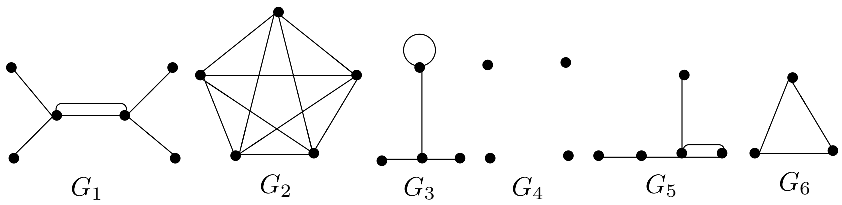

Figure 3: Grafi za nalogo 121.

122. Nariši grafe K_6, C_8, $K_{3,4}$, P_9 in N_{10}.

123. Zapiši množico vseh točk, povezav, vse stopnje točk in matriko sosednosti in incidenčno matriko za grafe na sliki 4.

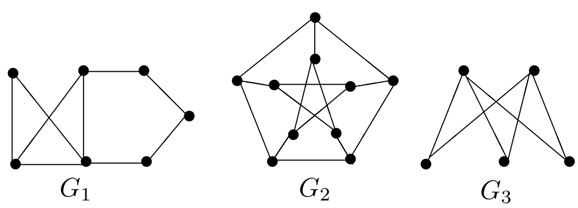

Figure 4: Grafi za nalogo 123.

124. Zapiši množico vseh točk, povezav, vse stopnje točk in matriki sosednosti in incidenčno matriko za digrafa na sliki 5.

125. Nariši digraf, ki ima

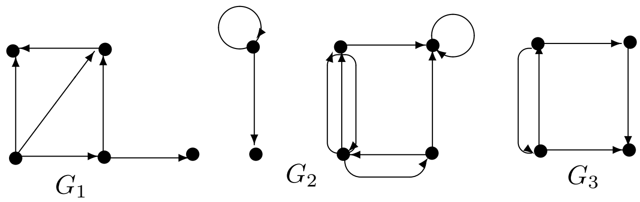

Figure 5: Grafi za nalogo 124.

(a) matriko sosednosti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

(b) incidenčno matriko:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

126. Nariši graf, ki ima:

(a) matriko sosednosti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(b) incidenčno matriko:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

127. Nariši enostaven povezan graf na 8 točkah in zaporedjem stopenj točk $(1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6)$.

128. Dokaži, da ni nobenega regularnega grafa stopnje 3 na 9 točkah.

129. Poišči dva različna kubična grafa na 10 točkah.

130. Poišči vsa drevesa, ki so regularni grafi.

131. S požrešnim algoritmom poišči najmanjše vpeto drevo uteženih grafov na sliki 6.

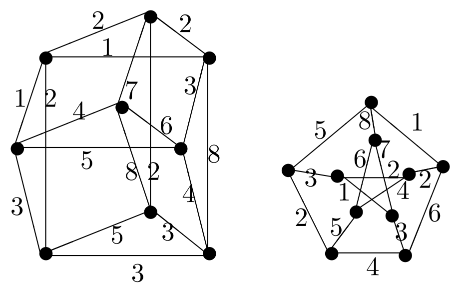

Figure 6: Grafi za nalogo 131.

132. Naj bo G graf z vsaj enopovezavo. Graf povezav $L(G)$ grafa G je določen z $V(L(G)) = E(G)$ in

$$E(L(G)) = \{ef \mid e, f \in E(G), e \cap f \neq \emptyset\}.$$

Nariši $L(K_4)$, $L(C_6)$ in $L(P_{10})$.

133. Naj bo H končna grupa in S neka njena podmnožica. Caylejev digraf $Cay(H, S)$ je definiran z

$$V(Cay(H, S)) = H$$
$$E(Cay(H, S)) = \{(h, hs) \mid h \in H, s \in S\}.$$

Nariši digrafa $Cay(\mathbb{Z}_4, \{2\})$ in $Cay(\mathbb{Z}_7, \{1, 6\})$.

134. Grafu W_n rečemo kolo, če je sestavljen iz cikla na n točkah in dodatno točko, ke je sosednja vsem točkam na ciklu. Poišči vsa kolesa W_n, ki so

(a) regularni grafi;

(b) dvodelni grafi.

135. Dokaži naslednjo trditev: vsako drevo ima vsaj dve točki stopnje ena.

136. Ugotovi katera drevesa imajo natanko dve točki stopnje ena!

137. Kateri grafi na sliki 7 so dvodelni?

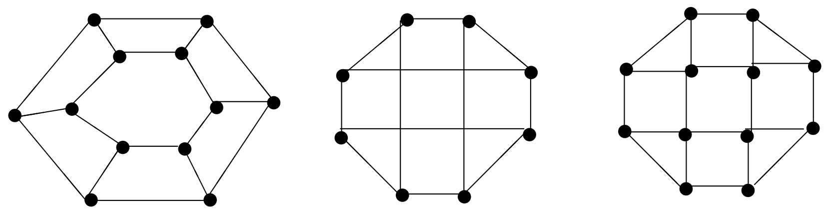

Figure 7: Grafi za nalogo 137.

138. Dokaži, da je graf dvodelen natanko tedaj, ko so vsi cikli sodi!

139. Posplošeni Petersenov graf $P_{n,k}$, $n \geq 3$, $0 < k < n$, je definiran z

$$
\begin{aligned}
V(P_{n,k}) &= \{u_i, v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}, \\
E(P_{n,k}) &= \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}.
\end{aligned}
$$

Nariši grafe $P_{5,2}$, $P_{8,1}$ in $P_{8,2}$. Kateri izmed njih so dvodelni?

140. V grafu na sliki 8 poišči:

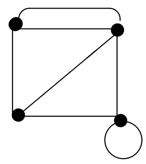

Figure 8: Graf za nalogo 140.

(a) sprehod dolžine 7,
(b) cikle dolžine 1, 2, 3 in 4,
(c) pot največje dolžine.

141. Poišči vse poti med točkama x in u v grafu na sliki 9.

142. Poišči najdaljšo pot v grafih na sliki 10.

143. Za grafa na sliki 11 izvedi BFS algoritem iz točke v.

144. Dve povezavi $e = uv$ in $f = ab$ iz grafa G sta v relaciji Θ, $e\Theta f$, če velja

$$d(u, a) + d(v, b) \neq d(u, b) + d(v, a).$$

(a) Ugotovi katere povezave so v relaciji Θ na ciklu C_5.
(b) Ali je Θ ekvivalenčna relacija?

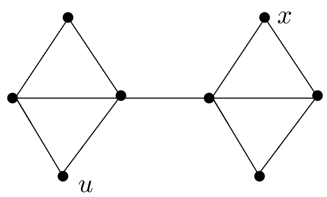

Figure 9: Grafi za nalogo 141.

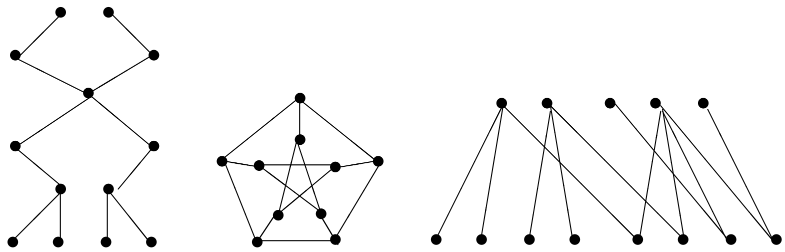

Figure 10: Grafi za nalogo 142.

(c) Poišči ekvivalenčne razrede Θ^* na C_6.

145. V naslednjem digrafu na sliki 12 poišči:

   (a) vse poti med u in x,
   (b) vse poti med x in u.

   Ali je digraf krepko ali šibko povezan?

146. Ali so grafi na sliki 13 izomorfni?

147. Ali sta katera izmed digrafov na sliki 14 izomorfna?

148. Kateri od digrafov na sliki 15 so poddigrafi digrafa G na sliki?

149. Kateri od naslednjih grafov na sliki 16 so Eulerjevi, poleulerjevi, hamiltonski ali polhamiltonski?

150. Kateri od grafov K_n, $K_{m,n}$, C_n in P_n so Eulerjevi:

151. Reši kitajski problem poštarja za grafa na sliki 17.

152. Ugotovi, katera od digrafov na sliki 18 sta Eulerjevi, poleulerjeva, Hamiltonova ali polhamiltonski.

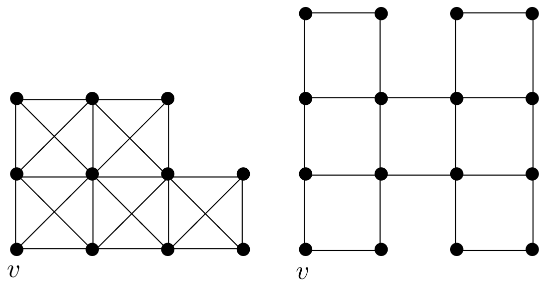

Figure 11: Grafi za nalogo 143.

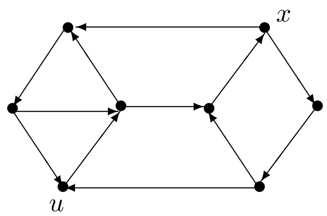

Figure 12: Grafi za nalogo 145.

153. Ali so grafi na sliki 19 Hamiltonovi?

154. Dokaži, da noben dvodelen graf z lihim številom točk ni Hamiltonov! Kaj pa polhamiltonov?

155. Ali je graf 20 na sliki Hamiltonov?

156. Kateri grafi s slike 21 so ravninski in kateri niso?

157. Kartezični produkt grafov $G_1(V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G = G_1 \Box G_2$, ki ima množico točk $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dve točki (a, x) in (b, y) pa sta sosednji v G, če velja $ab \in E_1$ in $x = y$, ali $a = b$ in $xy \in E_2$. Nariši grafa $C_4 \Box K_2$ in $P_3 \Box P_4$. Ali sta ravninska?

158. Poišči $\chi(G)$ za grafe na sliki 22!

159. Poišči $\chi(G)$ za graf s slike 22, ki mu odstrani krepko oznaeno povezavo.

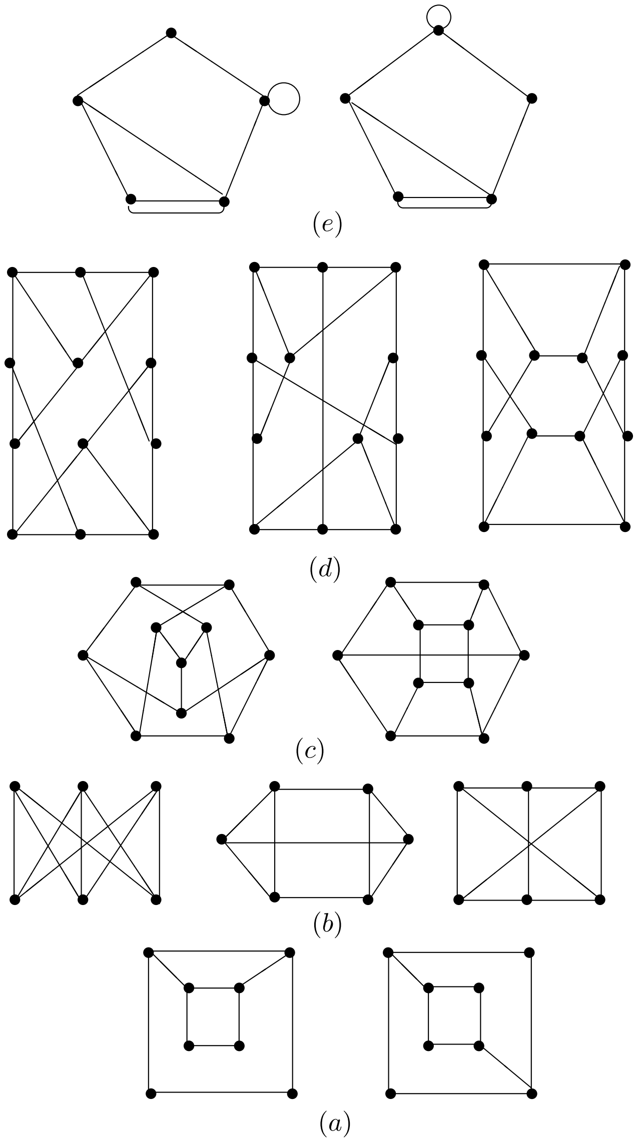

Figure 13: Grafi za nalogo 146.

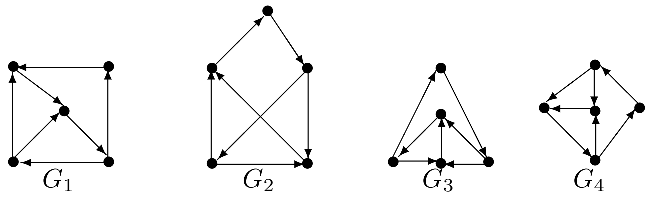

Figure 14: Digrafa za nalogo 147.

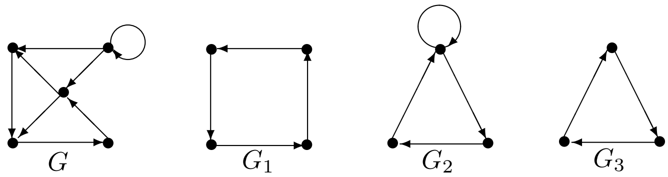

Figure 15: Digrafi za nalogo 148.

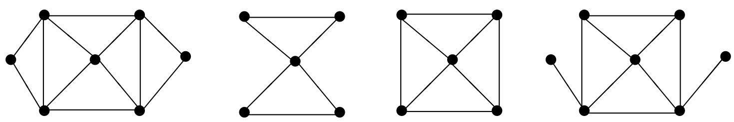

Figure 16: Grafi za nalogo 149.

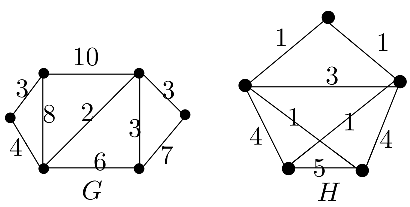

Figure 17: Grafa za nalogo 151.

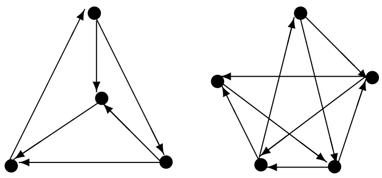

Figure 18: Digrafa za nalogo 152.

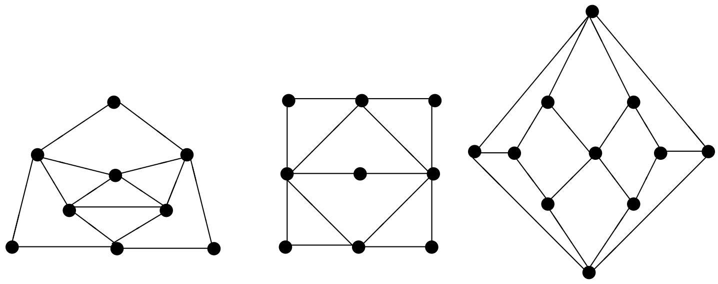

Figure 19: Grafi za nalogo 153.

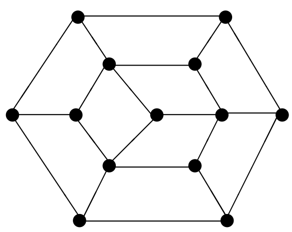

Figure 20: Graf za nalogo 155.

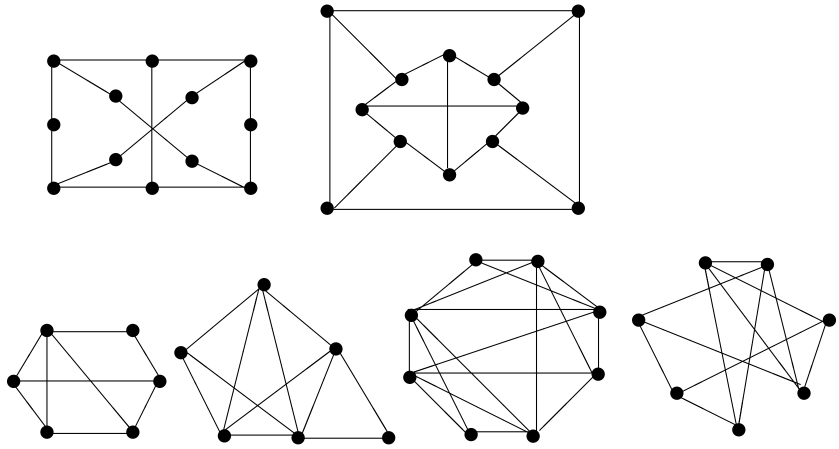

Figure 21: Grafi za nalogo 156.

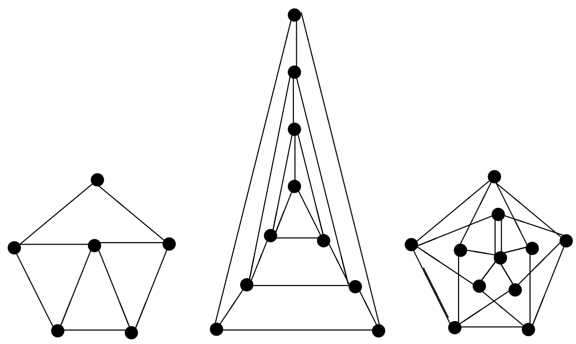

Figure 22: Grafi za nalogo 158.