1.

$f_1(x) = x$
$f_2(x) = 1/x$
$f_3(x) = -x$
$f_4(x) = -1/x$

$(\{f_1,f_2,f_3,f_4\},\circ)$ Kakšna struktura je to? Cayleyjeva tabela

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

$f_1\circ f_2 = f_1(1/x) = 1/x = f_2$
$f_1\circ f_3 = f_3$
$f_1\circ f_4 = f_4$
$f_1(x) = x = id(x)$
$f_2\circ f_2 = 1/x \circ 1/x = x = f_1$
$f_2\circ f_3 = -1/x = f_4$
$f_2\circ f_4 = -x = f_3$
$f_3\circ f_4 = 1/x = f_2$
$f_3\circ f_3 = x = f_1$
$f_4\circ f_4 = x = f_1$

to je grupoid (ker so vsi el. v tabeli od f_1 do f_4)
polgrupa: $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$ – to velja vedno za vse funkcije (asoc.). polgrupa je
monoid: f_1 je enota. monoid je
grupa: vsi elementi so obrnljivi (obrat vidiš tam kjer je enota (f_1)). grupa je

2.

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ e & a & d & d & c & b \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & e & d & c & b & a \end{pmatrix}$$

$$f\circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & c & d & d & a & e \end{pmatrix}$$

$$g\circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & f & c & c & d & e \end{pmatrix}$$

$$f\circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & e & d & d & d & a \end{pmatrix}$$

$$g\circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}$$

$A = \{a, \dots, f\}$
$B = \{a, \dots, f\}$

Koliko je funkcij, ki slikajo $A \to B$?

$6 * 6 * 6 * \dots * 6 = 6^6$
$|A| = n$
$|B| = m$

$m * m * \dots * m = m^n$ funkcij

Koliko je bijektivnih funkcij $A \to B$?
$n > m \Rightarrow$ ni injektivnih funkcij
$n < m \Rightarrow$ ni surjektivnih funkcij

$n!$ bijektivnih funkcij

3.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Določi h, da bo $f \circ h = g$.

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & 4/6 & 3 \end{pmatrix}$$

dve možnosti: ali 4 ali 6

4.

$<f> = (\{f, f^2, f^3, \dots, f^{m+d-1}\}, \circ)$
f je generator

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\exists$ najmanjša m in d: $f^d = f^{m+d}$
m – perioda
d – predperioda, indeks

Poišči ciklično polgrupo $<f>$.

$$f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = f^2$$

$f^4=f^3\circ f$

$f^3\circ f = f\circ f^3$, ker je polgrupa (je asoc.)

$d=2$

$m=2$

$\langle f\rangle=(\{f,f^2,f^3\},\circ)$ polgrupa

5.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\langle g\rangle = \{g\}$ grupa

$$g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = g$$

enota je g

$g^{-1} = g$

$g^2 = g$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$f^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} = f^2$$

$\langle f\rangle = (\{f,f^2,f^3,f^4\},\circ)$

$\circ$	f	f^2	f^3	f^4
f	f^2	f^3	f^4	f^2
f^2	f^3	f^4	f^2	f^3
f^3	f^4	f^2	f^3	f^4
f^4	f^2	f^3	f^4	f^2

$f^5 = f^2$

$f^4\circ f^4 = f^5\circ f^3 = f^2\circ f^3 = f^2$

Izmisli si f: $f^3 = f^6$ in bo prvih pet potenc različnih

$f^4 \circ f^2 = f^6 = f^5 \circ f = f^2 \circ f = f^3$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$id = f^3 = f^6$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$f^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$f^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

6.

$f \circ h = g$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Poišči h!

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

točno ena rešitev

7.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$f \circ h = g$, poišči h!

ni rešitve (ni 1 v spodni vrstici od f)

8.

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

$f \circ h = g$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/2 & 3 & 1/2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/2 & 3 & 1/2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

4 rešitve

9.

$h \circ f = g$, poišči h!

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$h = f$
$g = f^2$

10.

$\overset{h}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2/5 & 3 & 4 & 1 & \_ \end{pmatrix}} \circ \overset{f}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}} = \overset{g}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$

ni rešitve, ker v f se nič ne slika v 5.
tudi $1 \rightarrow 2$ in 5 ne gre

11.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

kjer $x \in \{1,2,3,4,5\}$. rešitev je 5.