

# IZPITNE NALOGE

## KOMPLEKSNA ŠTEVILA

### Absolutna vrednost

- (a) Izračunajte absolutno vrednost števila  $z = \frac{1+ia}{1-ia}$ , kjer je  $a \in \mathbb{R}$   
(b) Narišite množico  $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z+i| < 2 \text{ in } \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

### Rešitve:

- $|z| = 1$   
D je med 1 in 2 na Re osi (x) 1 je narisano s polno črto, 2 črtkano, vmes je vse črtkano
- Kaj je absolutna vrednost kompleksnega števila? Poiščite vsa kompleksna števila  $z$ , za katera velja  $|z+1| = |z| = 1$ . Zapišite dobljena števila v polarni obliki.
  - Poiščite vsa kompleksna števila  $z$ , ki rešijo enačbo

$$(1+i)z + 2i\bar{z} + 5 = 0$$

### Polarna oblika

- (a) Zapišite število  $z = (2-2i) / (1+i)$  v polarni obliki  
(b) Poiščite vse rešitve enačbe  $z^3 = i$ .
- (a) Narišite število  $-i$  v kompleksni ravnini in ga zapišite v polarni obliki  
(b) Poiščite vse rešitve enačbe  $z^3 = -i$ .
- (a) Zapišite število  $z_0 = (2-2i) / (1+i)$  v polarni obliki.  
(b) Izračunajte  $(z_0)^{17}$ .
- (a) Zapišite število  $-1$  v polarni obliki.  
(b) Poiščite vse rešitve enačbe  $z^{3/4} = -1$ .
- (a) Kompleksni števili  $\sqrt{3} + i$  in  $1-i$  zapiši v polarni obliki.  
(b) Poenostavi  $\frac{(\sqrt{3} + i)^6}{(1-i)^5}$ .

## NEENAČBE

1. Reši neenačbo  $|x-1| > |x+3|$

2. Poiščite vsa realna števila  $x$ , ki rešijo neenačbo:

(a)  $|x+2| - |x| \leq 1$ .

(b)  $\log(x^2-1) < 0$

## FUNKCIJE

1. Dana je funkcija  $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ .
- Nariši njen graf.
  - Določi zalogo vrednosti.

Rešite neenačbo  $f(x) \leq 5$ .

2. Dana je funkcija  $f(x) = e^{-\sqrt{2x-1}}$ .
- Določite njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
  - Poiščite njeno inverzno funkcijo  $f^{-1}$ .

3. Dana je funkcija  $f(x) = xe^{-x^2}$ .
- Izračunajte njen odvod.
  - Določite območja padanja in naraščanja funkcije.
  - Poiščite lokalne ekstreme.
  - Narišite graf.

4. Dana je funkcija  $f(x) = (x+1) \log(x^2 + 1)$ .
- Izračunajte njen odvod.
  - Zapišite enačbo tangente v točki  $x = -1$ .

5. Dana je funkcija  $g(x) = x^2e^{-x}$ .
- Izračunajte njen odvod.
  - Določite lokalne ekstreme.
  - Določite še interval naraščanja in padanja.
  - Zapišite enačbo tangente v točki  $x = 1$ .

6. Dana je funkcija  $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$ .
- Narišite njen graf.
  - Določite zalogo vrednosti.
  - Rešite neenačbo  $f(x) \geq 0$ .

7. Nariši graf funkcija  $f(x) = \frac{x}{x-2}$   
in določite množico tistih vrednosti  $x$ , za katere je  $0 \leq f(x) \leq 2$ .

8. Nariši graf funkcije  $f(x) = 1 - x|x|$ . Prepričajte se, da je funkcija injektivna in poiščite inverzno funkcijo.

9. Narišite graf funkcije  $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$

Zaporedje  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je podana rekurzivno s predpisom  $x_1 = 3$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

- Izračunajte prve tri člene zaporedja.
- Določite natančno spodnjo mejo zaporedja (pomagajte si s sliko, na kateri je graf funkcije  $f(x)$  skupaj s premico  $y=x$ ).
- Ali je zaporedje konvergentno? Če je, določite limito.

10. Nariši graf funkcije  $f(x) = \frac{|x|-2}{x+1}$ .

Poiščite še največjo in najmanjšo vrednost funkcije  $f(x)$  na intervalu  $[0,3]$ .

11. Približno narišite graf funkcije  $f(x) = \sin^2 x$ . Izračunajte ploščino območja, ki ga med dvema dotikališčema  $x$  osjo  $x$  omejuje graf skupaj z osjo  $x$ .

### Lokalni ekstremi, definicijsko območje, min, max, ...

1.. Za funkcijo  $g(x) = x^2 e^{-x}$  določite lokalne ekstreme ter intervale naraščanja in padanja in narišite njen graf.

2. Poišči vse ekstreme funkcije  $f(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$ .

3. (a) Poišči definicijsko območje funkcije  $\log\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$ .

(b) Koliko je  $f(x+1)$ , če je  $f(x-1) = x^2$ ?

4. Za funkcijo  $f(x) = x \log x$  določite definicijsko območje, limiti  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  in  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja in narišite njen graf.

5. Ali ima funkcija  $\log(1+5\sin(x-0.3)^2)$  na intervalu  $[0,1]$  kakšen ekstrem? Kje? Minimum in maksimum?

6. Poišči definicijsko območje funkcije  $\sqrt{9 - \sqrt{x-9}}$ .

7. Za funkcijo  $g(x) = x^2 e^{-x}$  določite lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja, asimptote in prevoje in narišite njen graf.

8. Izračunajte odvod funkcije  $f(x) = x e^{2x-1}$ . Poiščite območje, kjer funkcija narašča, območje, kjer funkcija pada, in lokalne ekstreme.

9. O funkciji  $f$  vemo, da je  $f(0) = 0$  in da je njen odvod  $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

Koliko je  $f(2)$ ?

## LIMITE

1. Izračunajte limiti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\log(n+1) - \log n),$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$$

**Rešitve:**

a) konvergentna ...  $\lim -1/3$

b) konvergentna ...  $= 1/2$

2. Izračunajte limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 - 5}}{n^2 + 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

## ZAPOREDJA - KONVERGENTNOST

1. Za naslednji zaporedji ugotovite, če sta konvergentni in izračunajte limito, če obstaja

$$(a) a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} + 1}$$

$$(b) a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n-3}$$

2. Za vsako od naslednjih zaporedij izračunajte limito ali pa dokažite, da je divergentno:

$$(a) a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$(b) a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

3. Ali je zaporedje  $a_n = \frac{3^n - 9}{3^n + 9}$

konvergentno? Če je, določite limito  $a$  in pa najmanjše število  $n_0$ , za katero velja, da je  $|a - a_n| < 3^{-20}$  za vsak  $n > n_0$ .

5. Ali je zaporedje  $a_n = \frac{2^n - 9}{2^n + 9}$

konvergentno? Če je, določite limito  $a$  in pa najmanjše število  $n_0$ , za katero velja, da je  $|a - a_n| < 2^{-20}$  za vsak  $n > n_0$ .

6. Izračunaj limito zaporedja  $\lim \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ .

7. (a) Izračunaj limito zaporedja  $x_n = (n^2 - 1) / (n^2 - n + 3)$

(b) Kateri je zadnji člen zaporedja, ki je od limite oddaljen za več kot  $1/20$ ?

## INTEGRALI

1.. Izračunajte integrala:

(a)  $\int \log x \, dx$

(b)  $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

(c)  $\int_0^{\infty} x e^{-x} \, dx$

(d)  $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2} \, dx$

2. Izračunajte nedoločeni integral

(a)  $\int (x-1) \sin x \, dx$

(b)  $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

(c)  $\int \cos^3 x \, dx$

(d)  $\int \frac{dx}{x^2-1}$

3. Zapiši pravilo za integriranje po delih. Izračunajte nedoločeni integral

$$\int x^2 \log x \, dx .$$

## PLOŠČINA IN VOLUMEN

1. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji

$$y = \frac{x^2}{2} \quad \text{in} \quad y = \frac{1}{1+x^2}$$

2. Poiščite ploščino območja med krivuljama  $y = 2x - x^2$  in  $y = x^2$ . Območje tudi narišite.

Rešitev:  $S = \pi l = 1/3$

3. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta parabola  $y = 2 - x^2$  in premica  $y = x$ .

4. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta krivulja  $y = xe^{-x}$ , premica  $x = 1$  in os  $x$ .

5. Izračunajte ploščino območja, ki ga omejujeta krivulji

$$y = |x| \quad \text{in} \quad y = x^2 - 2.$$

Namig: Upoštevajte simetrijo!

6. Narišite lik, ki ga omejujeta krivulji  $y = 2/x$  in  $y = 3 - x$  in izračunajte njegovo ploščino.

7. Izračunajte volumen vrtenine, dobljene z vrtenjem krivulje  $y = \log x$ ,  $1 \leq x \leq 2$ , okrog osi  $x$ .