Izpit iz 29.6.2007

1.Kaj je absolutna vrednost kompleksnega števila $z=x+yi$?
Poiščite vsa kompleksna števila z, za katera velja $|z-1|=|z|=1$.
Zapišite dobljena števila v polarni obliki.

Absolutna vrednost komp. števila **je $|z| = Sqrt(x^2 + y^2)$.**

$|z-1| = |z| =1$
$|x + yi -1| = Sqrt(x^2 + y^2) = 1$

1. del
$Sqrt(x^2 + y^2) = 1$ $/^2$
$x^2 + y^2 = 1$

2.del
$|x + yi -1| =1$
$|(x-1)+yi|=1$
$Sqrt((x-1)^2 + y^2) = 1$ $/^2$
$((x-1)^2 + y^2)=1$
$x^2 - 2x +1 +y^2 =1$
$x^2 - 2x +y^2 =0$

$x^2 - 2x +y^2 =0$
$x^2 + y^2 = 1$

Odštejemo in dobimo: $-2x = -1$ => $x=1/2$
Vstavimo v eno izmed enačb in dobimo $y=Sqrt(3/4)$.
$z= 1/2 + Sqrt(3/4)i$

Polarni zapis:
$z=|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$|z|=1$ (smo zgoraj izračunali)

$\cos\varphi=(1/2)/1$
$\varphi=60°$
$\varphi=Pi/3$.

$\sin\varphi=Sqrt(3/4)/1$
$\varphi=60°$
$\varphi=Pi/3$.

$z=1*(\cos Pi/3 + i\sin Pi/3)$

2. Za vsako zaporedje izračunajte limito ali pa dokažite, da je divergentno:
(a) a_n = SQRT (n^4 - 2n + 1) / 2n^2 - 3
(b) $a_0 = 0$ in $a_n = 2a_{n-1}-2$

a) Izračunaš limito, tako, da zgoraj in spodaj deliš z n^2 in dobiš
Sqrt($1-2/n^3+1/n^4$) /($2-3/n^2$) Vsi členi, ki imajo n so enaki 0 in tako dobiš Sqrt(1)/2, kar pa je enako **1/2.**

b) Narišeš graf, tako, da vstaviš nekaj točk: a0=0, a1=-2, a2=-6, a3=-14, a4=-30, a5= -62.
Ugotoviš, da gre v neskončnost, zato je zaporedje **divergentno**.

3. Dana je funkcija f(x) = x^2e^(1-x)
(a) Izračunaj njen odvod.
(b) Poiščite najmanjšo vrednost m in največjo vrednost M funkcije f(x) = x^2e^(1-x) na intervalu [0,4]

a) Najprej odvajamo po glavnem x kot polinom in dobimo:

$$2e^{(1-x)} * x^{2e^{(1-x)}-1}$$

Nato odvajamo po zgornjem x po pravilu (a^x)' = a^x * lnx:
To bi izgledalo tako:

$$x^{2e^{(1-x)}} * \ln(x^{2e})$$

Ampak moramo odvajati še 2e^(1-x), kar je enako

$$-2e^{(1-x)}$$

In namesto, tistega zgoraj napišemo:

$$-2e^{(1-x)} * x^{2e^{(1-x)}} * \ln(x)$$

Skupaj je to enako:

$$2e^{(1-x)} * x^{2e^{(1-x)}-1} - 2e^{(1-x)} * x^{2e^{(1-x)}} * \ln(x)$$

b)Odvod enačimo z 0 in izpostavimo 2e^(1-x) in ugotovimo, da e nikoli ne more biti enak 0, zato črtamo. Iz tistega kar ostane izpostavimo x^2e^(1-x). Nato dobimo dve enačbe: x^2e^(1-x)=0 in (x^-1 – ln(x))=0. Iz prve enačbe dobimo, da mora biti x=0, iz druge pa, da je x=1.
Najmanjša vrednost je **x=0**, največja pa **x=1**.

4. Integral (x^2dx) / (x^3+1)

Uporabimo novo spremenljivko u=(x^3+1), du=3*x^2dx in dobimo.

Integral 1/3 * du/u= 1/3 Integral du/u = 1/3 * log(u) = **1/3 * log(x^3+1)+C**

5. Kaj je povprečna vrednost funkcije f(x) na intervalu [a,b]? Izračunajte povprečni vrednosti funkcij f(x) = sin x in g(x) = {1; 0≤x<2Pi/3 2; 2Pi/3 ≤ x ≤ Pi} na intervalu [0, Pi]

U je povprečna vrednost funkcije f(x) na intervalu [a,b] , če lahko najdemo neko točko c na [a,b], kjer je vrednost f(c)=u.

U je tista višina, pri kateri ima pravokotnik z osnovnico[b-a] enako ploščino, kot lik pod grafom.

(b-a)*u=Integral od a do b f(x)dx.

Vstavimo podatke za funkcijo f(x).
(Pi-0)*u= Integral od 0 do Pi sinx dx.
To izračunamo in dobimo **u=0.**

Vstavimo podatke za funkcijo g(x).
(Pi-0)*u=Integral od 0 do (2Pi/3) dx + Integral od (2Pi/3) do Pi 2dx
To izračunamo in dobimo **u=4/3.**