

IZPIT IZ ANALIZE I VSP

Ljubljana, 19. 6. 2008

1. (a) Zapišite število $z = -1$ v polarni obliki.
(b) Poiščite vsa kompleksna števila, ki rešijo enačbo $z^4 + 1 = 0$
2. (a) Izračunajte limito $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$
(b) Določite a tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x + a; & x \leq 0 \\ \frac{\sin 2x}{x}; & x > 0 \end{cases}$$

zvezna v točki $x = 0$.

3. Dana je funkcija $f(x) = (x + 2) \log(x + 1)$
 - (a) Določite njeno definicijsko območje.
 - (b) Izračunajte njen odvod.
 - (c) Zapišite enačbo tangente v točki $x = 0$
4. Izračunajte ploščino območja, omejenega s krivuljami $x = 0$, $y = e^x$ in $y = 4 - e^{-x}$. Območje tudi narišite.

1. $z = -1; a = -1, b = 0$

a) $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi) = |1| \left(\cos(\arccos(\frac{-1}{1})) + i \sin(\arcsin(\frac{0}{1})) \right) = \cos\pi + i \sin\pi$

b) $z^4 = -1$

$z_1^2 = \sqrt{-1} = i$

$z_2^2 = -\sqrt{-1} = -i$

$z_{1,1} = \sqrt{i}$

$z_{1,2} = -\sqrt{i}$

$z_{2,1} = \sqrt{-i}$

$z_{2,2} = -\sqrt{-i}$

2.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x = 1 \cdot 1 = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x + a = 0 + a = a$

$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 1$

3. $f(x) = (x + 2)\log(x + 1)$

a) $Df = D(x + 2) \cap D(\log(x + 1)) = \mathbb{R} \cap (-1, \infty) = (-1, \infty)$

b) $f(x)' = (x + 2)' \cdot \log(x + 1) + (x + 2) \cdot \log(x + 1)' = \log(x + 1) + (x + 2) \cdot \frac{1}{(x + 1)} \cdot 1 = \log(x + 1) + \frac{x + 2}{x + 1}$

c) $f(0) = 2 \log 1 = 2$

$T_1(0, 2)$

$f(0)' = \log(1) + \frac{2}{1} = 2 = k_t$

$y - y_1 = k_t(x - x_1)$

$y = 2(x - 0) + 2 = 2x + 2$

4. $e^x = 4 - e^{-x} \quad / \cdot e^x$

$e^{2x} = 4e^x - 1$

$t = e^x$

$t^2 - 4t + 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 16 - 4$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{3}$

$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

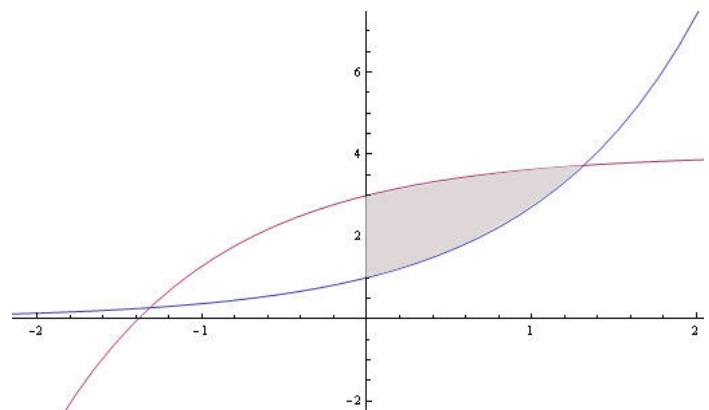
$t_1 = 2 + \sqrt{3}$

$t_2 = 2 - \sqrt{3}$

$t_1 = e^x$

$e^x = 2 + \sqrt{3}$

$x = \ln 2 + \sqrt{3}$



$$\int_0^{\ln 2 + \sqrt{3}} ((4 - e^{-x}) - e^x) dx =$$

$$4x + e^{-x} \Big|_0^{\ln 2 + \sqrt{3}} - e^x \Big|_0^{\ln 2 + \sqrt{3}}$$

$$(4(\ln(2 + \sqrt{3})) + e^{-\ln 2 + \sqrt{3}} - 1) - (e^{\ln 2 + \sqrt{3}} - 1)$$

$$4 \ln(2 + \sqrt{3}) + e^{-\ln 2 + \sqrt{3}} - e^{\ln 2 + \sqrt{3}} = 1.80373$$

Ploščino delimo še z 2, ker je $x=0$ razdeli lik ravno na polovico. Ploščina je 0,901865.